Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Maths-Physique, Maths-Méca - $3^{\text{ième}}$ année 2016/2017
Analyse Numérique

TD n°5 : Méthodes de quadrature

Quelques Rappels

Théorème 0.1. Formule de la moyenne :**
Soit $g \in \mathcal{C}([a,b])$ telle que g garde un signe constant sur $[a,b]$. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$, alors il existe $\chi \in [a,b]$ tel que $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\chi)\int_a^b g(x)dx$.

Preuve. Savoir démontrer ce résultat. Utiliser le fait que f atteint son sup et son inf sur $[a,b]$ puis utiliser le théorème des valeurs intermédiaires. □

Théorème 0.2. Formule de Taylor-Lagrange :**
Soit $f \in \mathcal{C}^n([a,b])$, telle que $f^{(n)}$ soit dérivable sur $]a,b[$ alors il existe $\eta \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + .. + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{(b-a)^{(n+1)}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\eta). \qquad (1)$$

Théorème 0.3. Formule de Taylor avec Reste Intégral :
Soit $f \in \mathcal{C}^{n+1}([a,b])$, alors $\forall x \in [a,b]$

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + .. + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)\,dt. \qquad (2)$$

Exercice 1. Autour de la méthode de Simpson

i) Soit g une fonction continue sur $[-1,1]$. On approche $I(g) = \displaystyle\int_{-1}^1 g(x)\,dx$ par la formule de quadrature de Simpson I^S telle que $I^S(g) = \frac{1}{3}(g(-1) + 4g(0) + g(1))$.
Montrer que la méthode de Simpson est une méthode d'ordre 3 c'est-à-dire

$$\forall Q \in \mathbb{R}_3[X] \quad I^S(Q) \;=\; I(Q).$$

ii) On suppose que $g \in C^4([-1,1])$. On note P_g le polynôme de degré 3 tel que

$$P_g(-1) = g(-1),\; P_g(0) = g(0),\; P_g'(0) = g'(0),\; P_g(1) = g(1).$$

Montrer que $E^S(g) := I(g) - I^S(g) \;=\; \displaystyle\int_{-1}^1 (g(x) - P_g(x))\,dx$.

iii) On a déjà montré (savoir refaire la démonstration) que

$$\forall x \in [a,b],\; \exists \zeta_x \in [a,b], \;\text{ tq. }\; g(x) - P_g(x) \;=\; \frac{(x-1)x^2(x+1)}{4!}g^{(4)}(\zeta_x).$$

Montrer $x \;\to\; g^{(4)}(\zeta_x)$ est continue sur $[-1,1]$ et en déduire que

$$\exists \chi \in [-1,1], \;\text{ tq. }\; E^S(g) \;=\; \frac{-1}{90}g^{(4)}(\chi).$$

iv) En déduire l'ordre de la formule de Simpson $I^S_{[a,b]}$ telle que $I^S_{[a,b]}(f) = \dfrac{b-a}{6}(f(a) + 4f(\dfrac{a+b}{2}) + f(b))$ approche $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ et montrer que si $f \in C^4([-a,b])$

$$\exists \chi \in [a,b], \;\; \text{tq.} \;\; \int_a^b f(x)\,dx - I^S_{[a,b]} \; = \; C(b-a)^N f^{(4)}(\chi),$$

où N et C sont à déterminer.

v) a) Donner la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$.

b) Simplifier l'expression $J = 4.\dfrac{1}{6}(\dfrac{1}{1+0^2} + 4.\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}^2} + \dfrac{1}{1+1^2})$ et vérifier que c'est une valeur approchée de π à 10^{-2} près.

c) Majorer la valeur absolue de la dérivée quatrième de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $[0,1]$ et déduire de la question 2 le nombre d'intervalles intervenant dans une subdivision régulière de $[0,1]$ pour obtenir les 25 premiers chiffres de l'écriture décimale de π.

Exercice 2. Une nouvelle formule d'intégration numérique : Posons pour $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$:

$$I(f) \; = \; \omega_a f(a) + \omega_b f(b) + \omega'_a f'(a) + \omega'_b f'(b). \tag{3}$$

i) Trouver ω_a, ω_b, ω'_a et ω'_b pour que $I(f)$ approchant $\displaystyle\int_a^b f(x)\;dx$ soit d' ordre 3. On supposera d'abord que $[a,b] = [-1,1]$ puis on se ramènera au cas général.

ii) Montrer que pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$, il existe un unique polynôme noté $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_f(a) = f(a)$, $P'_f(a) = f'(a)$, $P_f(b) = f(b)$ et $P'_f(b) = f'(b)$.

iii) On pose $E(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\;dx - I(f)$. Montrer que $E(f) = \displaystyle\int_a^b (f(x) - P_f(x))\;dx$.

iv) On admet le résultat suivant : On suppose que $f \in C^4([a,b])$. Alors pour tout $x \in [a,b]$, il existe $\xi_x \in]a,b[$ tel que

$$f(x) - P_f(x) = \frac{1}{4!}(x-a)^2(x-b)^2 f^{(4)}(\xi_x). \tag{4}$$

et tel que $x \to f^{(4)}(\xi_x)$ est continue sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $C > 0$ (à déterminer) tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^4([a,b]) \quad \exists \xi \in [a,b] \quad \text{tq.} \quad E(f) \; = \; C(b-a)^5 f^{(4)}(\xi). \tag{5}$$

v) Ecrire la formule de quadrature composée approchant $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\;dx$ associée à la formule de quadrature élémentaire (3), où on a discrétisé le segment $[\alpha,\beta]$ en p segments égaux (on pose $h = \dfrac{(\beta-\alpha)}{p}$).

vi) Montrer que l'erreur de la formule composée est en $\mathcal{O}(h^N)$ où N est un entier que l'on déterminera.

Exercice 3. Erreur de l'intégration numérique de Gauss-Legendre

Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+2}([-1,1])$.

On pose $I(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,dt$ et $J(f) = \displaystyle\int_{-1}^{1} P_f(t)\,dt$ où P_f désigne le polynôme d'interpolation de f aux $n+1$ points de Legendre $a_0,..,a_n$ où $a_0,\cdots,a_n$ sont les racines distinctes du polynôme de Legendre de degré $(n+1)$.

On note $M = \sup\limits_{t\in[-1,1]} \left|f^{(2n+2)}(t)\right|$.

i) Montrer que $J(f) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \omega_i f(a_i)$ où les poids ω_i s'exprime à l'aide des fonctions de base de Lagrange aux points $a_0,\cdots,a_n$.

ii) Soit T_f la partie régulière du développement de Taylor de f à l'ordre $2n+1$ en 0. En utilisant une formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|I(f) - I(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+3)!}. \tag{6}$$

iii) Démontrer de même que

$$|J(f) - J(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+2)!}. \tag{7}$$

iv) En déduire une majoration de $|I(f) - J(f)|$.

v) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 1$ (formule à 2 points d'ordre 3).

vi) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 2$ (formule à 3 points d'ordre 5).