Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - 3$^{\text{ième}}$ Année - Année 2016/2017
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

TD n^{o}6 : Etude numérique des équations différentielles

Exercice 1. Lemme de Gronwall discret : Soit $(\alpha_n)_{0\leq n\leq N}$ une suite de réels positifs ou nuls vérifiant

$$\alpha_{n+1} \;\leq\; (1+A)\,\alpha_n + B \quad \forall n \in \{0,..,N-1\}, \tag{1}$$

où $A>0$ et $B\geq 0$ sont des constantes indépendantes de n, montrer que

$$\alpha_n \;\leq\; e^{nA}\,\alpha_0 + \frac{e^{nA}-1}{A}B \quad \forall n \in \{0,..,N\}. \tag{2}$$

Exercice 2. Comparaison des méthodes d'Euler et d'Euler-Rétrograde :
La méthode d'Euler-Rétrograde s'écrit :

$$\begin{cases} y_0 \in \mathbb{R} \;\text{ donné} \\ y_{n+1} \;=\; y_n + hf(x_{n+1}, y_{n+1}) \quad \forall n \in \{0,..,N-1\} \end{cases} \tag{3}$$

1) Si f vérifie la condition de Lipschitz :

$$\exists L > 0 \text{ tq. } \|f(x,y) - f(x,z)\| \leq L\|y-z\|, \quad \forall x \in [x_0, x_0+a], \quad \forall y, z \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

et si $Lh < 1$, montrer que y_{n+1} est déterminé de façon unique par (3).
2) On pose $e_n = y(x_n) - y_n$ (l'erreur de discrétisation). En effectuant un développement de Taylor-Lagrange de y en x_{n+1}, et en utilisant le fait que f vérifie la condition de Lipschitz (4), montrer que

$$|e_{n+1}| \;\leq\; (\frac{1}{1-hL})|e_n| \;+\; \frac{h\omega(h,y')}{1-hL}\forall n \in \{0,..,N-1\}. \tag{5}$$

puis

$$\max_{0\leq n\leq N} |e_n| \;\leq\; e^{\frac{aL}{1-Lh}}|e_0| + \frac{e^{\frac{aL}{1-Lh}}-1}{L}\omega(y',h). \tag{6}$$

3) En déduire que la méthode est convergente et montrer que si $f \in \mathcal{C}^1([x_0, x_0+a]\times\mathbb{R})$, la méthode est d'ordre 1.

3) En déduire que la méthode est convergente et d'ordre 1.

4) On utilise cette méthode et celle d'Euler pour résoudre

$$\begin{cases} y' = \lambda y \\ y(0) = 1 \end{cases} \tag{7}$$

Soit h un réel strictement positif. On discrétise la demi-droite $\mathbb{R}^+$ en posant $x_n = nh\;\forall n \in \mathbb{N}$. Déterminer la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où y_n est une approximation de $y(x_n)$, pour chacune des deux méthodes.
5) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles la solution y reste bornée. Pour ces λ, en déduire les valeurs de h tels que la suite $(y_n)_{n\geq 0}$ reste bornée dans le cas du schéma d'Euler puis le cas du schéma d'Euler-rétrograde. Que peut-on dire si $\lambda = -10^3$?

Exercice 3. On étudie la méthode numérique (M) de résolution de l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ définie par

$$(M) \quad \left\{ \begin{array}{lcl} y_{n+1} & = & y_n + h_n \phi(x_n, y_n, h) \\ \phi(x, y, h) & = & \alpha f(x, y) + \beta f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x, y)) + \gamma f(x + h, y + h f(x, y)), \end{array} \right.$$

où α, β et γ sont des réels compris entre 0 et 1.

i) Pour quelles valeurs du triplet (α, β, γ) retrouve-t-on
- la méthode d'Euler ?
- la méthode du point milieu ?
- la méthode de Heun ?

ii) Dans cette question et la suivante on supposera que la fonction $f(t, y)$ est $\mathcal{C}^\infty$ sur $[t_0, t_0 + a] \times \mathcal{R}$ et vérifie une condition de Lipschitz globale. Pour quelles valeurs de (α, β, γ) la méthode proposée est-elle stable ?

iii) Quelles relations doivent satisfaire (α, β, γ) pour que la méthode soit
• consistante ? • convergente ? • d'ordre 1 ? • d'ordre 2 ?

iv) La méthode (M) peut-elle être d'ordre supérieur à 2 ?

Exercice 4. Méthodes de Runge Kutta d'ordre 2 Montrer que la méthode du point milieu :

$$y_{n+1} \; = \; y_n \; + \; hf\left(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} f(t_n, y_n)\right).$$

et la méthode de Heun :

$$y_{n+1} \; = \; y_n \; + \; \frac{h}{2}\left(f(t_n, y_n) + f(t_n + h, y_n + hf(t_n, y_n)\right).$$

sont d'ordre 2.

Exercice 5. La Méthode classique de R.K. explicite d'ordre 4 Montrer que la méthode de R.K. suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} y_0 \in \mathbb{R} \;\text{ est donné,} \\ k_{n,1} = f(x_n, y_n) \\ k_{n,2} = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_{n,1}) \\ k_{n,3} = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2} k_{n,2}) \\ k_{n,4} = f(x_n + h, y_n + h k_{n,3}) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}\left(k_{n,1} + 2k_{n,2} + 2k_{n,3} + k_{n,4}\right), \end{array} \right.$$

est d'ordre 4.