Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ème}}$ Année - Année 2016/2017
Analyse Numérique
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html

# EXAMEN MA650 ANALYSE NUMERIQUE, 17 mai 2017

**Exercice 1.** Pour $\alpha \in \mathbb{R}$ donné, on considère la matrice $A_\alpha$ :

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} 2 & \alpha & 0 \\ \alpha & 2 & \alpha \\ 0 & \alpha & 2 \end{pmatrix}$$

Ecrire la matrice $\mathcal{J} = M^{-1}N$ de la méthode itérative de Jacobi (on rappelle que dans ce cas $M = D$ et $N = E + F$). Pour quelles valeurs de $\alpha$ cette méthode converge-t-elle ?

**Exercice 2.**

1. Soit $\alpha_i, i = 1 \ldots 4$ quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant les égalités :

$$p(0) = \alpha_1, \quad p'(0) = \alpha_2, \quad p(1) = \alpha_3, \quad p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$

2. Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathbb{R}_3[X], i = 1 \ldots 4$ vérifiant les relations (1), avec respectivement :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_i = (1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1). \tag{2}$$

Montrer que le polynôme de la question 1 .s'écrit comme une combinaison linéaire de $p_i$ :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i \, p_i(x). \tag{3}$$

3. Soit $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$ et soit $p_f$ le polynôme de la question 1. avec :

$$\alpha_1 = f(0), \quad \alpha_2 = f'(0), \quad \alpha_3 = f(1), \quad \alpha_4 = f'(1). \tag{4}$$

Montrer que pour chaque point $x \in ]0,1[$, il existe un point $\xi_x \in ]0,1[$ où on a l'égalité :

$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \quad \text{avec} \quad \pi(x) = x^2(x-1)^2. \tag{5}$$

4. On approxime l'intégrale d'une fonction $f$ à l'aide de la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)dx \sim \int_0^1 p_f(x)dx. \tag{6}$$

Montrer que cette formule est exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer les poids $w_i = \displaystyle\int_0^1 p_i(x)dx$, $i = 1, \ldots, 4$ et en déduire une forme explicite de la formule de quadrature.

**Exercice 3.** Soit le système différentiel dans $\mathbb{R}^2$ défini par

$$\begin{cases} x' = 2(x - ty) \\ y' = 2y \end{cases}$$

1. Déterminer la solutution du système précédent qui passe par le point $(x_0, y_0)$ au temps $t = 0$.
2. On utilise la méthode d'Euler explicite pour approcher la solution exacte sur un intervalle $[0, T]$ avec pas constant $h = \frac{T}{N}$, démarrant au temps $t_0 = 0$. Soit $(x_n, y_n)$ le point atteint au temps $t_n = nh$ $(n \in [0, N])$
   (a) Ecrire la relation qui lie $(x_{n+1}, y_{n+1})$ à $(x_n, y_n)$.
   (b) Calculer explicitement $(x_n, y_n)$ en fonction de $n$, $h$, $x_0$, $y_0$. On pourra utiliser la suite auxiliaire $z_n = \dfrac{x_n}{(1+2h)^n}$.
   (c) Sans utiliser les théorèmes généraux du cours, vérifier que la solution approchée converge vers la solution exacte au sens énoncé dans le cours, c'est à dire :

$$\lim_{N \to +\infty} \max(\{|x_n - x(t_n)|, 0 \leq n \leq N\}) \quad \text{et} \quad \lim_{N \to +\infty} \max(\{|y_n - y(t_n)|, 0 \leq n \leq N\})$$

3. Proposer (et écrire) un schéma numérique plus précis que celui présenté ici.