Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ème}}$ Année - Année 2016/2017
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

EXAMEN MA650 ANALYSE NUMERIQUE, SESSION 2, 29 juin 2017

Exercice 1. Supposons que les nombres soient représentés en virgule flottante dans une base décimale avec 3 chiffres significatifs et que le résultat des opérations est arrondi à 3 chiffres significatifs. Soit le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme premier pivot 10^{-4}.
2. Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme ligne pivot à la première étape, la deuxième ligne.
3. Conclure.

Exercice 2.

1. Soit $f \in C^{n+1}([0,1], \mathbb{R})$ $(n \in \mathbb{N}^*)$. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)dx - \frac{1}{2}\left[f(0) + f(1)\right] = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 \alpha_j f^{(j)}(x)dx + \int_0^1 P_{n+1}(x) f^{(n+1)}(x)dx$$

où les famille $(P_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}^*}$ et $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ sont définies par les relations de récurrence :

$$P_1(x) = \frac{1}{2} - x \quad \text{et} \quad \alpha_1 = 0$$

et

$$P_{j+1}(x) = \int_0^x (\alpha_j - P_j(t))dt \quad \text{et} \quad \alpha_{j+1} = \int_0^1 P_{j+1}(t)dt, \quad (j \in \mathbb{N}^*)$$

(*on pourra raisonner par récurrence sur* n).

2. Montrer de plus que $\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2j-1} = 0 \quad \text{et} \quad P_j(x) = (-1)^j P_j(1-x)$.
3. Soit $f \in C^{2n+2}([a,b], \mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On note $h = \dfrac{b-a}{k}$. Montrer que

$$\int_a^b f(x)dx = T_k + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{2j} h^{2j} \int_a^b f^{(2j)}(x)dx + h^{2n+2} \int_a^b \tilde{P}_{2n+2}(\frac{x-a}{h}) f^{(2n+2)}(x)dx$$

où $\tilde{P}_{2n+2}$ représente le prolongement par périodicité sur $\mathbb{R}$ de la restriction de P_{2n+2} à $[0,1[$ et

$$T_k = h\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} f(a+jh)\right].$$

4. En déduire que la méthode des trapèzes appliquée à l'intégrale de période d'une fonction $f \in C^{2n+2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 1-périodique, est d'ordre $2n + 2$, à savoir :

$$\int_0^1 f(t)dt = h\left[\frac{f(0) + f(1)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} f(jh)\right] + O(h^{2n+2})$$

Exercice 3.

On s'intéresse au problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} y'(t) = f(t, y(t)), & t \in [0, T] \\ y(0) \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où f est C^2 de $[0, T] \times \mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et est globalement Lipschitzienne par rapport à sa seconde variable avec un coefficient de Lipschitz noté L.

Etudier la consistance, la stabilité puis déterminer l'ordre de la méthode suivante :

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}f(t_n, y_n)), \quad \text{où} \quad t_n = nh, h = T/N.$$