Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ème}}$ Année - Année 2016/2017
Analyse Numérique
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html

EXAMEN MA650 ANALYSE NUMERIQUE, corrigé

Exercice 1. On écrit la décomposition habituelle $A_\alpha = D - E - F$. La matrice de la méthode de Jacobi est

$$\mathcal{J} = D^{-1}(E+F) = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

Cette méthode converge si et seulement si $\varrho(\mathcal{J}) < 1$.

$$\begin{aligned} -det(D)p_{\mathcal{J}}(\lambda) = & \quad -det(E+F-\lambda D) \\ = & \left| \begin{pmatrix} 2\lambda & \alpha & 0 \\ \alpha & 2\lambda & \alpha \\ 0 & \alpha & 2\lambda \end{pmatrix} \right| \\ = & \quad 2\lambda[4\lambda^2 - \alpha^2] - \alpha[2\lambda\alpha] \\ = & \quad 4\lambda(2\lambda^2 - \alpha^2). \end{aligned}$$

On en déduit que $\sigma(\mathcal{J}) = \{0, -\alpha/\sqrt{2}, \alpha/\sqrt{2}\}$ et $\varrho(\mathcal{J}) = |\alpha|/\sqrt{2}$. La méthode converge donc si et seulement si $\alpha \in]-\sqrt{2}, \sqrt{2}[$.

Exercice 2.

1. Si $p \in \mathbb{R}_3[X]$, les équations (1) forment un système linéaire de 4 équations ù 4 inconnues (les coefficients du polynôme). Il suffit donc de montrer que le système homogène associé, obtenu pour $\alpha_i = 0$, n'admet que la solution nulle.

   En effet, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ implique que $(x=0)$ et $(x=1)$ sont racines doubles et p s'écrit sous la forme :
   $$p(x) = q(x)\, x^2 (x-1)^2.$$
   Comme $p \in \mathbb{R}_3[X]$, nécessairement $q(x) = 0$.

2. Si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, on obtient facilement que :
   $$\left\{ \begin{array}{lcl} a_0 & = & \alpha_1 \\ a_1 & = & \alpha_2 \\ a_2 & = & -\alpha_4 + 3\alpha_3 - 2\alpha_2 - 3\alpha_1 \\ a_3 & = & \alpha_4 - 2\alpha_3 + \alpha_2 + 2\alpha_1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{lcl} p_1(x) & = & 2x^3 - 3x^2 + 1 \\ p_2(x) & = & x^3 - 2x^2 + x \\ p_3(x) & = & -2x^3 + 3x^2 \\ p_4(x) & = & x^3 - x^2 \end{array} \right. .$$
   Par unicité de la solution du système (1), il suffit de montrer que $\sum_{i=1}^4 \alpha_i p_i$ vérifie le système pour pouvoir conclure que $p = \sum_{i=1}^4 \alpha_i p_i$. Notons $q = \sum_{i=1}^4 \alpha_i p_i$. On obtient facilement, à partir des définitions des polynômes p_i, que $q(0) = \alpha_1$, $q'(0) = \alpha_2$, $q(1) = \alpha_3$ et $q'(1) = \alpha_4$ donc q vérifie (1), d'où la conclusion.

3. Considérons la fonction :
   $$g(t) = f(t) - p_f(t) - \frac{f(x) - p_f(x)}{\pi(x)}\,\pi(t) \Longrightarrow g'(t) = f'(t) - p_f'(t) - \frac{f(x) - p_f(x)}{\pi(x)}\, 2t(t-1)(2t-1).$$

Comme $g(0) = g(x) = g(1) = 0$, il existe (th. de Rolle) au moins $\xi_1 \in]0, x[$ et $\xi_2 \in]x, 1[$ tels que $g^{'}(\xi_1) = g^{'}(\xi_2)$. De plus, il est évident que $g^{'}(0) = g^{'}(1) = 0$: donc, $g^{'}$ s'annule en 4 points et, par conséquent, il existe $\xi_x \in]0, 1[$ tel que $d^3/dx^3(g^{'})(\xi_x) = g^{(4)}(\xi_x) = 0$. En dérivant dans l'expression de g, nous obtenons ($p_f \in \mathbb{R}_3[X]$ donc $p_f^{(4)} = 0$) :

$$f^{(4)}(\xi_x) - \frac{f(x) - p_f(x)}{\pi(x)} 4! = 0,$$

d'où le résultat demandé.

4. Si $f(x) = p(x) \in \mathbb{R}_3[X]$, l'unicité démontrée au a) montre que $p_f(x) = p(x) = f(x)$, donc la formule de quadrature est exacte pour $p(x) \in \mathbb{R}_3[X]$.
Un calcul élémentaire donne les valeurs des poids :

$$w_1 = 1/2, \quad w_2 = 1/12, \quad w_3 = 1/2, \quad w_4 = -1/12.$$

Par conséquent, la formule de quadrature s'écrit sous la forme :

$$\int_0^1 f(x)dx \sim \frac{1}{2}\left(f(0) + f(1)\right) + \frac{1}{12}\left(f'(0) - f'(1)\right)$$

Exercice 3.

1. On obtient à partir de la seconde équation $y(t) = y_0 e^{2t}$. En injectant cette solution dans la première équation, on obtient $x' = 2x - 2ty_0e^{2t}$. La solution de l'équation homogène associée est $x(t) = Ke^{2t}$ et la méthode de variation de la constante conduit à l'équation $K'e^{2t} = -2ty_0e^{2t}$, d'o ? $K' = -2ty_0$ c'est-à-dire $K = -y_0t^2 + C$. Finalement, la solution de la première équation est $x(t) = -y_0t^2e^{2t} + C_1e^{2t}$ et la condition initiale donne $C_1 = x_0$. La courbe intégrale cherchée est donc la courbe $(x(t), y(t))$ avec

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x(t) & = & (x_0 - y_0t^2)\, e^{2t} \\ y(t) & = & y_0\, e^{2t} \end{array} \right.$$

2. (a) La méthode d'Euler s'écrit ici $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + 2h(x_n - nhy_n, y_n)$. On a donc en particulier

$$y_{n+1} = (1 + 2h)y_n \Longrightarrow y_n = (1 + 2h)^n y_0.$$

Il vient alors la relation

$$x_{n+1} = (1 + 2h)x_n - 2nh^2(1 + 2h)^n y_0 \Longleftrightarrow \frac{x_{n+1}}{(1 + 2h)^{n+1}} = \frac{x_n}{(1 + 2h)^n} - \frac{2nh^2}{1 + 2h} y_0.$$

(b) Posons $z_n = x_n/(1 + 2h)^n$. On a

$$z_{n+1} = z_n - \frac{2y_0h^2}{1 + 2h} n \Longrightarrow z_n = z_0 - \frac{2y_0h^2}{1 + 2h} \frac{n(n-1)}{2}$$

et enfin, pour tout $n \geq 1$,

$$x_n = (1 + 2h)^n x_0 - n(n-1)h^2(1 + 2h)^{n-1} y_0.$$

(c) Pour y (et en prenant $x_0 = y_0 = 1$), on a

$$y(nh) - y_n = e^{2nh} - (1+2h)^n = e^{2nh}(1 - e^{n\ln(1+2h) - 2nh}) = e^{2nh}(1 - e^{-2nh^2 + no(h^2)})$$

et on a bien

$$\lim_{h \to 0} \max(\{|y_n - y(t_n)|, 0 \leq n \leq N\})$$

Pour x, le terme en e^{2t} se traite comme pour y tandis que pour l'autre terme, on a

$$(nh)^2e^{2nh} - n(n-1)h^2(1+2h)^{n-1} = (nh)^2e^{2nh}\left(1 - \frac{e^{-2nh^2 + no(h^2)}}{(1 + 2h)}\right) + nh^2(1+2h)^{n-1}$$

Chacun de ces termes converge uniformément en $n \in \{0, ..., N\}$ vers 0 quand h tend vers 0 (le deuxième terme se majore en valeur absolue par hTe^{2T}).