Université de Versailles-Saint Quentin
L3 Maths - Dble lic. Maths-Phys - Dble lic. Maths-Meca Année 2016/2017
Analyse Numérique - MA650 Ch. Poirier

Contrôle d'Analyse Numérique du mardi 21 mars 2017 - 1h30

Aucun document, ni portable et autre instrument électronique ne sont autorisés

Exercice 1. Soient A **une matrice carrée symétrique réelle inversible** et $b \in \mathbb{R}^n$. L'utilisation d'une méthode itérative pour la résolution de l'équation $Ax = b$ consiste à choisir deux matrices M inversible et N telles que $A = M - N$ et à construire une suite (x^k) définie par le choix d'une condition initiale x^0 et par les itérations

$$Mx^{k+1} = Nx^k + b \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

i) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la méthode (1) converge quelque soit x^0.

ii) Montrer que $M^T + N$ est symétrique.

On suppose dorénavant que $M^T + N$ est définie positive.
On a vu en cours que si A est définie positive alors la méthode (1) converge quelque soit x^0. Dans cet exercice, on souhaite montrer la réciproque. Posons $B = M^{-1}N$.
On admet le résultat suivant : Pour $y \in \mathbb{R}^n$, si on pose $z = By$, alors on a l'identité :

$$(y, Ay) - (z, Az) \;=\; (y - z, (M^T + N)(y - z)), \tag{2}$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.
On suppose dans la suite de l'exercice que la méthode converge pour tout $x^0 \in \mathbb{R}^n$.

iii) Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que $y_{n+1} = B(y_n)\ \forall\ n \geq 0$. Montrer que la suite (α_n) telle que $\alpha_n = (y_n, Ay_n)$ est décroissante et qu'elle converge vers 0.

iv) Montrer que si $y_0 \neq 0$, alors $\alpha_1 < \alpha_0$.

v) Démontrer par l'absurde que A est définie positive (on pourra déduire ce résultat de la question précédente, en choisissant un vecteur y_0 adéquat).

Exercice 2. On décompose A en une somme de trois matrices $A = D - E - F$ de la manière suivante :

$$A \;=\; \begin{bmatrix} \ddots & & -F \\ & D & \\ -E & & \ddots \end{bmatrix},$$

où D est diagonale, F triangulaire supérieure, E triangulaire inférieure :

$$\begin{cases} D_{ii} = A_{ii} & \text{pour } i = 1 \text{ à } n \\ D_{ij} = 0 & \text{pour } i \neq j \end{cases} \quad \begin{cases} (-E)_{ij} = A_{ij} & \text{pour } i > j \\ (-E)_{ij} = 0 & \text{pour } i \leq j \end{cases} \quad \begin{cases} (-F)_{ij} = A_{ij} & \text{pour } i < j \\ (-F)_{ij} = 0 & \text{pour } i \geq j \end{cases}.$$

Dans chacun des trois cas, on décompose la matrice A sous la forme $A = M - N$.

Jacobi	Gauss-Seidel
$M = D,\ N = E + F$	$M = D - E,\ N = F$

Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 1 & \alpha \\ \alpha & \alpha & 1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

i) En remarquant que $A = (1-\alpha)I + \alpha B$ où $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer les valeurs du paramètre réel α pour lesquelles la matrice A est définie positive.

ii) Pour quelles valeurs de α la méthode de Jacobi est-elle convergente ? (Penser à utiliser B).

iii) Pour quelles valeurs de α la méthode de Gauss-Seidel est-elle convergente ? On pourra utiliser l'exercice 1.

Exercice 3. Décomposition LU d'une matrice tridiagonale :

Soient $n \geq 2$ et $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ une matrice inversible.

Pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$, on note A_k la matrice appartenant à $\mathbb{R}^{k,k}$ telle que $(A_k)_{ij} = A_{ij}$, pour $1 \leq i, j \leq k$. On pose $\alpha_k = \det(A_k)$ pour $k \in \{1, .., n\}$ et $\alpha_0 = 1$.

i) Montrer que si A admet la décomposition LU alors A_k admet la décomposition $L_k U_k$ et calculer $u_{11}, .., u_{nn}$ en fonction des α_i, $0 \leq i \leq n$.

ii) **Décomposition LU d'une matrice tridiagonale** : On suppose maintenant que A est tridiagonale, c'est-à-dire de la forme :

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1 & a_2 & b_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & c_{n-2} & a_{n-1} & b_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & c_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \tag{4}$$

(a) - Montrer que la suite (α_k) vérifie la relation de récurrence :

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = a_1, \quad \forall k \in \{2, .., n\}, \quad \alpha_k = a_k \alpha_{k-1} - b_{k-1} c_{k-1} \alpha_{k-2}.$$

(b) - On suppose que $\alpha_k \neq 0$ pour tout k compris entre 1 et n, et on rappelle qu'alors A admet une décomposition LU, et que puisque A est tridiagonale, L et U le sont aussi.
Effectuer la factorisation LU de la matrice A. On exprimera les coefficients de L et U en fonction des $\beta_k = \dfrac{\alpha_k}{\alpha_{k-1}}$, $\quad 1 \leq k \leq n$ et des coefficients de A.

(c) Les coefficients de A étant donnés sous la forme (4), écrire un algorithme donnant les coefficients de L et U et donner le coût de l'algorithme obtenu.