Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - 3$^{\text{ème}}$ Année - Année 2017/2018
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

CC1 MA650 ANALYSE NUMERIQUE, 6 mars 2018

Exercice 1. Pour tout réel α, on note A_α la matrice

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les valeurs propres de la matrice A_α ?
2. Pour quelles valeurs de α, la matrice A_α est elle inversible ?
3. Calculer les normes $|||A_\alpha|||_1$, $||||A_\alpha|||_2$ et $|||A_\alpha|||_\infty$.

Exercice 2. Soit A une matrice carrée $n \times n$ dont toutes les sous-matrices diagonales sont inversibles.

1. Montrer qu'il existe
   — une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité (*i.e.* $L_{i,i} = 1$),
   — une matrice triangulaire supérieure S à diagonale unité,
   — une matrice diagonale D
   telles que
   $$A = LDS. \tag{1}$$
2. Montrer que cette décomposition est unique.
3. Montrer que si A est symétrique, la décomposition (1) devient :
   $$A = LDL^T.$$
4. Retrouver la décomposition de Cholesky dans le cas où la matrice A est symétrique définie positive.
5. Montrer que si la matrice A est symétrique mais pas définie positive, on peut factoriser A sous la forme
   $$A = B\tilde{B}^T,$$
   où B est une matrice triangulaire inférieure et $\tilde{B}$ une matrice dont chaque colonne est soit égale à la colonne correspondante de B, soit égale à cette colonne changée de signe.
6. Appliquer cette factorisation à
   $$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. Le but de cet exercice est de montrer qu'on ne peut rien dire en général de la comparaison de deux méthodes itératives.

1. Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

montrer que la méthode de Jacobi converge et pas celle de Gauss Seidel.

2. Trouver un exemple où la méthode de Gauss Seidel converge et pas celle de Jacobi.