Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ème}}$ Année - Année 2017/2018
Analyse Numérique
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html

CC2 MA650 ANALYSE NUMERIQUE, 3 mai 2018

Exercice 1.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_t^n pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_t^n(x) = ((x-t)_+)^n = (max(x-t,0))^n$$

1. Représenter graphiquement les fonction f_{-1}^1, f_0^2 et f_1^1.
2. Pour toute fonction réellle f, on note $E(f)$ l'erreur de quadrature pour la méthode élémentaire des trapèzes sur $[-1,1]$:
$$E(f) = \int_{-1}^{1} f(x)dx - (f(-1) + f(1))$$
On note N l'ordre de cette méthode. Rappeler pourquoi $N = 1$.
3. Calculer explicitement la fonction K définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :
$$K(t) = E(f_t^N)$$
avec $N = 1$ (ordre de la méthode des trapèzes).
On distinguera les cas $t \in]-1,1[$ et $t \notin]-1,1[$.
4. Reprendre le calcul précédent en remplaçant la méthode des trapèzes par la méthode de Simpson élémentaire sur $[-1,1]$ (on veillera à calculer la nouvelle valeur de N).

Exercice 2.

On considère la famille de polynômes orthogonaux et unitaires $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ associée au poids $w > 0$ sur $]a,b[$. On veut montrer le résultat classique que P_n est scindé à racines simples, toutes situées dans $]a,b[$.

1. Montrer (en raisonnant par l'absurde) que P_n possède au moins une racine sur $]a,b[$ pour $n \geq 1$.
2. On note x_1,...,x_l l'ensemble des racines où P_n change de signe sur $]a,b[$. Montrer que $l = n$. Conclure.

Exercice 3. On considère le schéma numérique à un pas suivant ;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta T}{3}\left(f(t_n,y_n) + 2f(t_n + \frac{3}{4}\Delta T, y_n + \frac{3}{4}\Delta T f(t_n,y_n))\right)$$

pour approcher la solution exacte de l'équation différentielle :

$$\forall t \in [0,T], \quad y'(t) = f(t,y(t))$$

où $f \in C([0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$ et est globalement Lipschizienne par rapport à sa deuxième variable.

1. Montrer que le schéma précédent est consistant, stable et convergent.
2. On suppose que $f \in C^2([0,T]\times\mathbb{R},\mathbb{R})$. Montrer que le schéma est d'ordre 2.
3. En prenant $f(t,y) \equiv f(y)$, montrer que le schéma n'est pas d'ordre 3.