Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ième}}$ Année - Année 2017/2018
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

TD n°1 : Norme Matricielle et Conditionnement d'une Matrice

Exercice 1. Normes subordonnées aux normes l_p Soit $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ Montrer que

$$|||A|||_1 \;=\; \max_{1\le j\le n}(\sum_{i=1}^{n}|A_{ij}|), \quad \text{et} \quad |||A|||_\infty \;=\; \max_{1\le i\le n}(\sum_{j=1}^{n}|A_{ij}|).$$

Exercice 2. On définit l'application de $\mathbb{K}^{n,n}$ dans $\mathbb{R}^+$ définie par

$$\forall A \in \mathbb{K}^{n,n} \quad |||A||| \;=\; \sum_{i,j}|A_{i,j}|.$$

- **i)** Montrer que $|||\cdot|||$ est une norme sur $\mathbb{K}^{n,n}$.
- **ii)** Montrer que si N est une norme subordonnée à une norme vectorielle sur $\mathbb{K}^n$ alors $N(I_n) = 1$
- **iii)** Qu'en déduire pour $|||\cdot|||$?
- **iv)** La norme $|||\cdot|||$ est-elle une norme matricielle ?

Exercice 3. Norme matricielle et rayon spectral

- **i)** Montrer que toute norme matricielle est compatible à une norme vectorielle.

  Indication : On pose pour tout $x \in \mathbb{K}^{n,n}$, $\|x\| := |||\begin{pmatrix} x_1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ x_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}|||$.
- **ii)** Soit $N(A) = \max_{i,j}|A_{ij}|$. Est-ce une norme sur $\mathbb{K}^{n,n}$? Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $A \in \mathbb{K}^{n,n}$ telle que $\rho(A) > N(A)$ (on rappelle que $\rho(A)$ est égal au maximum des modules des valeurs propres complexes de A). Conclure.

Exercice 4. Norme de Frobenius ou norme de Schur

(A) (a) Soient E un espace vectoriel réel, préhilbertien (on note $< .,. >$ le produit scalaire associé), et F un espace vectoriel de **dimension finie**, montrer alors que

$$F \;\oplus\; F^\perp \;=\; E.$$

Cette propriété est en général fausse si F n'est pas de dimension finie.

Indication : Pour $x \in E$, on considèrera le vecteur $y = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$ où $(e_1, .., e_n)$ est une base orthonormée de F.

(b) Dans l'espace $\mathbb{R}^{n,n}$, on note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathcal{A}_n$ l'espace des matrices antisymétriques de $\mathbb{R}^{n,n}$. Montrer

$$\mathcal{S}_n \quad \oplus \quad \mathcal{A}_n \quad = \quad \mathbb{R}^{n,n}.$$

(c) Montrer que l'application $< .,. >$ définie de $\mathbb{R}^{n,n} \times \mathbb{R}^{n,n}$ telle que

$$\forall A, B \in \mathbb{R}^{n,n} \quad < A, B > \quad = \quad \mathrm{tr}((A^T)B),$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}^{n,n}$ et que pour ce produit scalaire

$$\mathcal{S}_n \quad = \quad (\mathcal{A}_n)^{\perp}.$$

(B) On définit

$$|||A|||_s \ = \ \sqrt{\mathrm{tr}(A^{\star} \cdot A)}.$$

(a) Montrer que

$$|||A|||_s \ = \ \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}.$$

(b) Montrer que $||| \cdot |||_s$ est une norme sur $\mathbb{K}^{n,n}$ (on l'appelle norme de Schur).

(c) Montrer que $||| \cdot |||_s$ n'est pas une norme subordonnée à une norme vectorielle.

(d) Montrer que $||| \cdot |||_s$ est une norme matricielle.

(e) Montrer que $||| \cdot |||_s$ est compatible avec la norme vectorielle $|| \cdot ||_2$.

(f) Montrer que $\rho(A) \ \leq \ \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}$.

(g) Montrer que $\forall A \in \mathbb{K}^{n,n}, \quad |||A|||_2 \ \leq \ |||A|||_s \ \leq \ \sqrt{n}|||A|||_2$.

Exercice 5. Conditionnement d'une matrice Soient A et δA deux matrices appartenant à $\mathbb{C}^{n,n}$ telles que A et $A + \delta A$ soient inversibles. Le vecteur $b \in \mathbb{C}^n$ tel que $b \neq 0$ étant donné, on note x et $x + \delta x$ les solutions des systèmes linéaires :

$$Ax \ = \ b, \qquad (A + \delta A)(x + \delta x) \ = \ b. \tag{1}$$

Montrer que

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \leq k(A) \frac{|||\delta A|||}{|||A|||}, \tag{2}$$

et que cette inégalité est la meilleure possible : en effet, montrer que A étant fixée, on peut choisir b et δA tels que l'on ait égalité dans (2).

Exercice 6. Conditionnement du Laplacien discrétisé par différences finies

On souhaite discrétiser le problème (L) $\left\{ \begin{array}{l} -y" = f \\ y(a) = y(b) = 0 \end{array} \right.$ où f est donnée sur $[a, b] =$

$[x_0, x_{n+1}]$ en posant $x_i = x_{i-1} + h$ $(1 \leq i \leq n+1)$. On pose de plus $x_{i+1/2} = \dfrac{x_i + x_{i+1}}{2}$. On approche la dérivée $y'(x_{i+1/2})$ par

$$y'(x_{i+1/2}) \quad \simeq \quad \frac{(y(x_{i+1}) - y(x_i))}{h},$$

et la dérivée seconde $y"(x_i)$ par

$$y"(x_i) \quad \simeq \quad \frac{(y'(x_{i+1/2}) - y'(x_{i-1/2}))}{h}.$$

On obtient alors une discrétisation du problème $-y" = f$ par le schéma suivant :

$\forall i \in [|1, n|] \quad \dfrac{-y_{i-1} + 2y_i - y_{i+1}}{h^2} \quad = \quad f(x_i), (3)$où y_i représente une approximation de $y(x_i)$, $\forall i \in [|1, n|], y_0 = y(x_0) = 0,\ y_{n+1} = y(x_{n+1}) = 0$. Le problème discrétisé (3) s'écrit matriciellement sous la forme : $AY = h^2 F$ où $Y = [y_1, .., y_n]^T$, $F = [f(x_1), .., f(x_n)]$ et où la matrice $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ est défnie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

On remarque que si y est solution du problème (L) alors $\displaystyle\int_a^b -y" y\, dx = +\int_a^b y'y'\, dx + \underbrace{[-y'y]_a^b}_{=0} = +\int_a^b y'y'\, dx > 0$. On va démontrer l'analogue discret.

i) Montrer que A est symétrique définie positive : on montrera que

$$(Ay, y) = \sum_{i=0}^{n} (y_{i+1} - y_i)^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \text{ en posant } y_0 = y_{n+1} = 0$$

ii) Diagonaliser la matrice A dans le cas $n = 3$ (on peut remarquer l'existence d'une valeur propre évidente).

iii) On revient au cas général et on considère les vecteurs $v_k, k = 1, .., n$ suivants :

$$v_k = [\sin(\frac{k\pi}{n+1}), \sin(\frac{2k\pi}{n+1}), .., \sin(\frac{nk\pi}{n+1})]^T, \quad k = 1, \cdots, n.$$

Calculer Av_k, pour $k = 1, \cdots, n$ et en déduire la diagonalisation de A.

iv) calculer un équivalent, lorsque n tend vers l'infini du conditionnement de A, matrice carrée d'ordre n, représentant le Laplacien discret.