Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - 3$^{\text{ième}}$ Année - Année 2017/2018
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

TD n°2 : Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ -6 & -10 & -13 \\ -9 & -22 & -36 \end{pmatrix}.$$

i) Trouver les matrices intérmédiaires E_1, E_2 de la factorisation de Gauss (i.e. telles que E_2E_1A soit triangulaire supérieure). On n'utilisera pas ici de stratégie de pivôt.

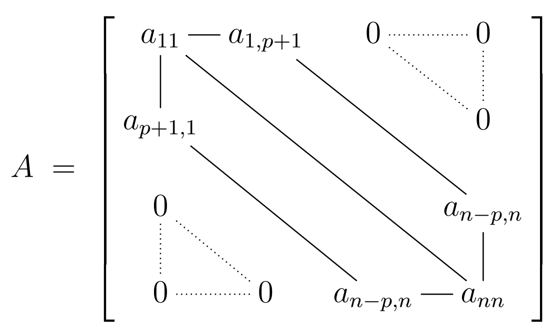
ii) Calculer le produit E_2E_1A.

Exercice 2.

i) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU que l'on déterminera. La matrice A est-elle inversible ?

ii) Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Cholesky que l'on déterminera.

Exercice 3. Conservation de la structure bande d'une matrice par décomposition LU Le but de l'exercie est de montrer que si A a une structure bande c'est-à-dire si il existe $p \in \{0, .., n-1\}$ tel que $A_{i,j} = 0$ pour tout i, j tel que $|i-j| > p$ alors il en est de même pour L et U.
Remarque : A est nulle en dehors des $2p+1$ diagonales centrales et A a la forme suivante :



On fixe l'indice k tel que $\underline{k \geq p+2}$, alors A vérifie A_{kj} et A_{jk} sont nuls pour j compris entre 1 et $k-(p+1)$.

i) Montrer par récurrence sur j que sur la $k^{\text{ième}}$ ligne de L, on a : $L_{kj} = 0$ pour $1 \leq j \leq k-(p+1)$.

ii) Montrer par récurrence sur j que sur la $k^{\text{ième}}$ colonne de U, on a $U_{jk} = 0$ pour $1 \leq j \leq k-(p+1)$.

Exercice 4. Pour N entier, on définit la matrice tridiagonale d'ordre N (matrice du Laplacien discrétisé) :

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Calculer la factorisation de Cholesky de la matrice A_4.

ii) Calculer la factorisation de Cholesky de la matrice A_N.

Exercice 5. Soit $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ une matrice inversible. On note $A = [A_1, .., A_n]$ où A_i est la $i^{\text{ième}}$ colonne de A. L'objectif est de construire Q orthogonal et R triangulaire supérieure tels que $A = QR$ à partir de A

i) On va utiliser ici le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt. On définit les vecteurs $q_1, .., q_n$ par récurrence :

$$\begin{cases} \tilde{q_1} = A_1, \quad q_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|_2}, \\ \text{pour } i \in \{1, .., n-1\}, \quad \tilde{q_{i+1}} = A_{i+1} - \displaystyle\sum_{k=1}^{i} (A_{i+1}, q_k)\, q_k, \quad q_{i+1} = \frac{\tilde{q_{i+1}}}{\|\tilde{q_{i+1}}\|_2}. \end{cases}$$

(a) Après avoir expliqué pourquoi $A_1 \neq 0$, montrer par l'absurde que $\tilde{q_2} \neq 0$, puis montrer que $\tilde{q_2} \perp q_1$, que $\text{Vect}\{A_1, A_2\} \subset \text{Vect}\{q_1, q_2\}$ puis que $\text{Vect}\{A_1, A_2\} = \text{Vect}\{q_1, q_2\}$.

(b) Montrer par récurrence que pour $i \in \{1, ..n\}$, on a :

$$\tilde{q_i} \neq 0, \quad \text{Vect}\{A_1, .., A_i\} = \text{Vect}\{q_1, .., q_i\}, \quad \text{et que la famille } \{q_1, .., q_i\} \text{ est orthonormée.}$$

(c) En utilisant la question **i)**(b), déterminer Q orthogonale et R triangulaire supérieure avec $R_{ii} > 0$ $(1 \leq i \leq n)$ telles que $A = QR$.

ii) (a) Ecrire un algorithme qui permet de calculer Q et R.

(b) Quel est le coût (en nombre d'opérations) d'un produit scalaire de deux vecteurs de taille n ?

(c) Calculer le coût de votre algorithme.