

TD n°5 : Méthodes de quadrature

Exercice 1. Autour de la méthode de Simpson

- i) Soit $a > 0$ et $g \in C^5([-a, a], \mathbb{R})$, impaire. Montrer que si $|x| < a$, il existe un réel ξ entre 0 et x tel que

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180}g^{(5)}(\xi)$$

(Indication : considérer la fonction auxiliaire $h(t) = g(t) - \frac{t}{3}(g'(t) + 2g'(0)) + \frac{\alpha}{180}t^5$ avec α tel que $h(x) = 0$).

- ii) Soit $f \in C^5([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6} \left[f'(a) + f'(b) + 4f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi).$$

En déduire une estimation de l'erreur commise par la méthode de Simpson appliquée à une fonction $g \in C^4([a, b], \mathbb{R})$.

- iii) a) Donner la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

b) Simplifier l'expression $J = 4 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1+0^2} + 4 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}^2} + \frac{1}{1+1^2} \right)$ et vérifier que c'est une valeur approchée de π à 10^{-2} près.

c) Majorer la valeur absolue de la dérivée quatrième de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$ et déduire de la question 2 le nombre d'intervalles intervenant dans une subdivision régulière de $[0, 1]$ pour obtenir les 25 premiers chiffres de l'écriture décimale de π .

Exercice 2. Une nouvelle formule d'intégration numérique : Posons pour $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$:

$$I(f) = \omega_a f(a) + \omega_b f(b) + \omega'_a f'(a) + \omega'_b f'(b). \quad (1)$$

- i) Trouver ω_a , ω_b , ω'_a et ω'_b pour que $I(f)$ approchant $\int_a^b f(x) dx$ soit d'ordre 3. On supposera d'abord que $[a, b] = [-1, 1]$ puis on se ramènera au cas général.
- ii) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4$ défini par $\varphi(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b))$ est un isomorphisme. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, il existe un unique polynôme noté $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_f(a) = f(a)$, $P'_f(a) = f'(a)$, $P_f(b) = f(b)$ et $P'_f(b) = f'(b)$.

- iii) On pose $E(f) = \int_a^b f(x) dx - I(f)$. Montrer que $E(f) = \int_a^b (f(x) - P_f(x)) dx$.
- iv) On admet le résultat suivant : On suppose que $f \in C^4([a, b])$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - P_f(x) = \frac{1}{4!}(x-a)^2(x-b)^2 f^{(4)}(\xi_x). \quad (2)$$

et tel que $x \rightarrow f^{(4)}(\xi_x)$ est continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $C > 0$ (à déterminer) tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^4([a, b]) \quad \exists \xi \in [a, b] \quad \text{tq.} \quad E(f) = C(b-a)^5 f^{(4)}(\xi). \quad (3)$$

- v) Ecrire la formule de quadrature composée approchant $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ associée à la formule de quadrature élémentaire (1), où on a discrétisé le segment $[\alpha, \beta]$ en p segments égaux (on pose $h = \frac{(\beta - \alpha)}{p}$).
- vi) Montrer que l'erreur de la formule composée est en $\mathcal{O}(h^N)$ où N est un entier que l'on déterminera.

Exercice 3. Formule d'Euler Mac-Laurin et méthode des trapèzes

- i) Soit $f \in C^{n+1}([0, 1], \mathbb{R})$ ($n \in \mathbb{N}^*$). Montrer que

$$\int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{2}[f(0) + f(1)] = \sum_{j=1}^n \int_0^1 \alpha_j f^{(j)}(x) dx + \int_0^1 P_{n+1}(x) f^{(n+1)}(x) dx$$

où les famille $(P_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}[X]^{\mathbb{N}^*}$ et $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}^*} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}^*}$ sont définies par les relations de récurrence :

$$P_1(x) = \frac{1}{2} - x \quad \text{et} \quad \alpha_1 = 0$$

et

$$P_{j+1}(x) = \int_0^x (\alpha_j - P_j(t)) dt \quad \text{et} \quad \alpha_{j+1} = \int_0^1 P_{j+1}(t) dt, \quad (j \in \mathbb{N}^*)$$

(on pourra raisonner par récurrence sur n).

- ii) Montrer de plus que $\forall j \in \mathbb{N}^*, \quad \alpha_{2j-1} = 0 \quad \text{et} \quad P_j(x) = (-1)^j P_j(1-x)$.
- iii) Soit $f \in C^{2n+2}([a, b], \mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{N}^*$. On note $h = \frac{b-a}{k}$. Montrer que

$$\int_a^b f(x) dx = T_k + \sum_{j=1}^n \alpha_{2j} h^{2j} \int_a^b f^{(2j)}(x) dx + h^{2n+2} \int_a^b \tilde{P}_{2n+2}\left(\frac{x-a}{h}\right) f^{(2n+2)}(x) dx$$

où $\tilde{P}_{2n+2}$ représente le prolongement par périodicité sur $\mathbb{R}$ de la restriction de P_{2n+2} à $[0, 1[$ et

$$T_k = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} f(a + jh) \right].$$

- iv) En déduire que la méthode des trapèzes appliquée à l'intégrale de période d'une fonction $f \in C^{2n+2}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, 1-périodique, est d'ordre $2n + 2$, à savoir :

$$\int_0^1 f(t)dt = h \left[\frac{f(0) + f(1)}{2} + \sum_{j=1}^{k-1} f(jh) \right] + O(h^{2n+2})$$

Exercice 4. Erreur de l'intégration numérique de Gauss-Legendre

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$.

On pose $I(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt$ et $J(f) = \int_{-1}^1 P_f(t) dt$ où P_f désigne le polynôme d'interpolation de f aux $n+1$ points de Legendre (racines du n -ème polynôme de Legendre).

On note $M = \sup_{t \in [-1, 1]} |f^{(2n+2)}(t)|$.

- i) Soit T_f la partie régulière du développement de Taylor de f à l'ordre $2n + 1$ en 0. En utilisant une formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|I(f) - I(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+3)!}. \quad (4)$$

- ii) Démontrer de même que

$$|J(f) - J(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+2)!}. \quad (5)$$

- iii) En déduire une majoration de $|I(f) - J(f)|$.
- iv) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 1$ (formule à 2 points d'ordre 3).
- v) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 2$ (formule à 3 points d'ordre 5).