Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{iéme}}$ Année - Année 2017/2018
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

TD n°4 : Interpolation et approximation de fonctions

Exercice 1. Polynômes de Lagrange et de Hermite

Soit $\epsilon \in]0,1[$ et f une fonction C^3 sur $[0,1]$. On note

$$a = f(0), \quad b = f(1) \quad \text{et} \quad M = \sup_{x\in]0,1[} |f^{(3)}(x)|.$$

a) Déterminer le polynôme d'interpolation P_ϵ de f relativement aux points 0, ϵ et 1.

b) On note $E_1(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approxime $f(x)$ par $P_\epsilon(x)$. Donner une majoration de $|E_1(x)|$ en fonction de M et ϵ.

c) Soit $x \in [0,1]$. Montrer que pour chaque x de l'intervalle $[0,1]$,

$$\lim_{\epsilon->0^+} P_\epsilon(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a.$$

d) Vérifier que le polynôme $P(x) = [b - a - f'(0)]x^2 + f'(0)x + a$ ainsi obtenu est l'unique polynôme de degré ≤ 2 vérifiant

$$P(0) = a, \quad P'(0) = f'(0), \quad P(1) = b$$

Ce polynôme est appelé *polynôme d'interpolation d'Hermite de la fonction f relativement aux points* $0, 1$ *et aux entiers* $1, 0$, ce qui signifie qu'on approche f à l'ordre 1 au point 0 et à l'ordre 0 au point 1.

e) On note $E_2(x)$ l'erreur commise en un point $x \in [0,1]$ lorsqu'on approxime f par P. Donner une majoration de $|E_2(x)|$ en fonction de M.

(Indication : considérer la fonction φ définie par $\varphi(t) = f(t) - P(t) - \frac{f(x)-P(x)}{x^2(x-1)}t^2(t-1)$ pour $x \in]0,1[$ fixé et montrer qu'il existe $\xi \in [0,1]$ tel que $\varphi^{(3)}(\xi) = 0$).

Exercice 2. Interpolation d'Hermite

i) Soit $\alpha_i, i = 1\dots4$ quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant les égalités :

$$p(0) = \alpha_1, \quad p'(0) = \alpha_2, \quad p(1) = \alpha_3, \quad p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$

ii) Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathbb{R}_3[X], i = 1\dots4$ vérifiant les relations (**??**), avec respectivement :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_i = (1,0,0,0), \quad (0,1,0,0), \quad (0,0,1,0), \quad (0,0,0,1). \tag{2}$$

Montrer que le polynôme de la question 1 .s'écrit comme une combinaison linéaire de p_i :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, p_i(x). \tag{3}$$

iii) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$ et soit p_f le polynôme de la question 1. avec :

$$\alpha_1 = f(0), \quad \alpha_2 = f'(0), \quad \alpha_3 = f(1), \quad \alpha_4 = f'(1). \tag{4}$$

Montrer que pour chaque point $x \in]0,1[$, il existe un point $\xi_x \in]0,1[$ où on a l'égalité :

$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \quad \text{avec} \quad \pi(x) = x^2(x-1)^2. \tag{5}$$

iv) On approxime l'intégrale d'une fonction f à l'aide de la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)dx \sim \int_0^1 p_f(x)dx. \tag{6}$$

Montrer que cette formule est exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer les poids $w_i = \displaystyle\int_0^1 p_i(x)dx$, $i = 1, \ldots, 4$ et en déduire une forme explicite de la formule de quadrature.

Exercice 3. Etude de l'erreur d'interpolation - Choix des points d'interpolation

Soit p_n le polynôme d'interpolation de Lagrange associé à la fonction f définie sur $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, relativement à $n+1$ points $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ de cet intervalle. Afin d'estimer l'erreur d'interpolation

$$E_n(x) = f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \pi_{n+1}(x) f^{(n+1)}(\xi_x), \qquad \pi_{n+1}(x) = (x-x_0)\cdots(x-x_n),$$

nous nous proposons de calculer une majoration de $|\pi_{n+1}(x)|, x \in [a,b]$ pour différents choix de la répartition des points d'interpolation.

a) (points équidistants) Lorsque les points d'interpolation sont équidistants, on a

$$|\pi_{n+1}(x_0 + sh)| = h^{n+1} \underbrace{|s(s-1)\cdots(s-n)|}_{\phi(s)}.$$

• Montrer que $\phi(s)$ atteint son maximum en un point $s_n \in]0, 1/2[$ et que $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$.

• Montrer que $\phi(s_n) \leq \dfrac{C_1}{\ln n} n!$, où C_1 est une constante positive.

• En utilisant la formule de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, montrer qu'il existe $C_2 > 0$ tel que

$$|\pi_{n+1}(x)| \leq \frac{C_2}{\sqrt{n}\,\ln n}\left(\frac{b-a}{e}\right)^{n+1}.$$

b) (points de Tchebichev)

• Montrer que $t_n(u) = \cos(n \arccos u), u \in [-1,1]$ est un polynôme de degré n. Trouver la formule de récurrence qui permet de calculer $t_n(u)$.

• Trouver les racines $u_i \in [-1,1], i = 0, 1, \ldots, n$ du polynôme t_{n+1} (points d'interpolation de Tchebichev d'ordre n).

• Montrer que les polynômes de base de Lagrange l_i associés aux points u_i sont donnés par

$$l_i(u) = (-1)^i \frac{t_{n+1}(u)}{(u-u_i)} \frac{\sqrt{1-u_i^2}}{(n+1)}.$$

Calculer l'erreur d'interpolation.

• Les points d'interpolation de Tchebichev d'ordre n de l'intervalle $[a, b]$, notés x_i, sont définis comme les images des points u_i par une bijection affine $u \to x$ qui envoie -1 en a et $+1$ en b.
Montrer que les polynômes de base de Lagrange $\tilde{l}_i$ associés aux points x_i sont donnés par

$$\tilde{l}_i(x) = l_i(u)$$

où u est l'image réciproque de x par la bijection affine définie précédemment. Montrer enfin que

$$||\pi_{n+1}|| = \sup_{x\in[a,b]} |\pi_{n+1}(x)| = 2\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

Comparer avec l'expression obtenue pour les points d'interpolation équidistants.

Exercice 4. Polynômes orthogonaux (Tchebichev et Legendre)

Soit $]a, b[$ un intervalle, borné ou non, de $\mathbb{R}$. Par définition, un *poids* w est une fonction continue, positive $w :]a, b[\to]0, +\infty[$ avec la propriété suivante : l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |x|^n\, w(x)\, dx$ est convergente pour tout entier n.

L'espace vectoriel (E) des fonctions f continues sur $]a, b[$, telles que :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2\, w(x)\, dx} < +\infty,$$

sera muni du produit scalaire naturel :

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\, w(x)\, dx.$$

a) Montrer que (E) contient l'espace vectoriel des fonctions polynômes.
Montrer qu'il existe une suite unique de polynômes unitaires (p_n), $\deg(p_n) = n$, orthogonaux pour un poids donné w.

b1) Montrer que les polynômes de Tchebichev $t_n(x) = \cos(n \arccos x), x \in [-1, 1]$ sont deux à deux orthogonaux, relativement au poids $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

b2) Même question pour les polynômes de Legendre $L_n(x) = \dfrac{1}{2^n\, n!}\dfrac{d^n}{dx^n}\left[(x^2-1)^n\right]$, relativement au poids $w(x) = 1$ sur $[-1, 1]$.

c) Soit (p_n) une suite de polynômes unitaires orthogonaux pour le poids w. Montrer que les polynômes p_n vérifient la relation de récurrence :

$$p_n(x) = (x - \lambda_n)\, p_{n-1}(x) - \mu_n\, p_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

avec

$$\lambda_n = \frac{< xp_{n-1}, p_{n-1} >}{\|p_{n-1}\|_2^2}, \qquad \mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|_2^2}{\|p_{n-2}\|_2^2}.$$

Retrouver, en particulier, les relations de récurrence pour le calcul des polynômes de Tchebichev et de Legendre :

$$t_{n+1}(x) = 2x\, t_n(x) - t_{n-1}(x)$$
$$nL_n(x) = (2n-1)xL_{n-1}(x) - (n-1)L_{n-2}(x).$$