Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ème}}$ Année - Année 2017/2018
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

EXAMEN MA650 ANALYSE NUMERIQUE, 25 mai 2018, correction

Exercice 1.

1. (a) (2 pts) Pour $\alpha = 0$, on a $M^{-1}N = Q$ et donc $\rho(M^{-1}N) = 1$. La méthode n'est pas convergente (cours).

   (b) (2 pts) Pour $\alpha > 0$, $M^{-1}N = \frac{1}{1+\alpha}(\alpha I + Q)$. Soit $\lambda = \cos\theta + i\sin\theta$ une valeur propre de Q. On a

$$|\frac{1}{1+\alpha}(\alpha+\lambda)|^2 = \frac{1}{(1+\alpha)^2}((\alpha+\cos\theta)^2+\sin\theta^2) = \frac{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2}{1+2\alpha+\alpha^2} < 1$$

   car $\lambda \neq 1$ et donc $\cos\theta < 1$.

2. (a) (2 pts) En notant $e_k = x^k - x$, on a classiquement (voir cours)

$$e_{k+1} = M^{-1}Ne_k = \frac{1}{1+\alpha_k}(\alpha_k e_k + Qe_k)$$

   En notant λ_j la valeur propre de Q associée à v_j, on a donc avec les notations de l'énoncé :

$$a_j^{k+1} = \frac{1}{1+\alpha_k}(\alpha_k+\lambda_j)a_j^k$$

   puis

$$a_j^k = \prod_{i=0}^{k-1}\frac{\alpha_i+\lambda_j}{1+\alpha_i}a_j^0$$

   (b) (2 pts) Soit j fixé. On a vu que pour $\alpha > 0$ fixé, on a $\frac{\alpha+\lambda_j}{1+\alpha} < 1$. La fonction qui à $x \in [c,d]$ associe $\frac{x+\lambda_j}{1+x}$ est continue. Elle atteint donc son maximum sur cet ensemble compact, noté $l_j < 1$. On a donc

$$|a_j^k| \leq (l_j)^k |a_j^0|$$

   La suite (a_j^k) est donc convergente vers 0 quand k tend vers l'infini, ceci pour tout $j \in \{1,...,n\}$. La méthode est donc convergente.

Exercice 2.

1. (3 pts) Les 5 racines de T_5 s'écrivent $x_k = \cos\dfrac{(2k+1)\pi}{10}$ pour $k = 0,...4$. On a donc $x_0 = -x_4$, $x_1 = -x_3$ et $x_2 = 0$. En notant l_j les polynômes de base de Lagrange associés, on montre que $l_0(x) = l_4(-x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (et de même $l_1(x) = l_3(-x)$ et $l_2(x) = l_2(-x)$). En effet, le polynôme $x \mapsto l_4(-x)$ vérifie exactement les même conditions que l_0 aux 5 points d'interpolation. Il est donc égal à l_0.
   Soit à présent f une fonction paire. Le polynôme d'interpolation de f s'écrit

$$P(x) = f(x_0)l_0(x) + f(x_1)l_1(x) + f(0)l_2(x) + f(x_3)l_3(x) + f(x_4)l_4(x)$$

   et on a avec les résultat précédent :

$$P(-x) = f(x_0)l_4(x) + f(x_1)l_3(x) + f(0)l_2(x) + f(x_3)l_1(x) + f(x_4)l_0(x) = P(x)$$

   grâce à la parité de f.

2. (3 pts) Le polynôme d'interpolation de Lagrange de f relativement aux points de Tchebychev s'écrit (avec la parité de f) :

$$P(x) = f(x_0)(l_0(x) + l_4(x)) + f(x_1)(l_1(x) + l_4(x)) + f(x_2)l_2(x)$$

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned} l_0(x) + l_4(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)x(x-x_4)}{(x_0-x_1)(x_0-x_3)x_0(x_0-x_4)} + \frac{(x-x_1)(x-x_3)x(x-x_0)}{(x_4-x_1)(x_4-x_3)x_4(x_4-x_0)} \\ &= \frac{(x^2-x_1^2)}{(x_0^2-x_1^2)}\left(\frac{x^2-xx_4+x^2-xx_0}{2x_0^2}\right) = \frac{(x^2-x_1^2)}{(x_0^2-x_1^2)}\frac{x^2}{x_0^2} \end{aligned}$$

En répétant ce procédé, on trouve que $P(x) = q(x^2)$ où $q(u)$ est le polynôme d'interpolation de Lagrange de $f(u) = \dfrac{1}{1+u}$ relativement aux points 0, x_0^2 et x_1^2.

3. (3 pts) On a

$$\begin{aligned} q(u) =& \frac{1}{1+\cos^2(\frac{\pi}{10})}.\frac{u(u-\cos^2(\frac{3\pi}{10}))}{\cos^2(\frac{\pi}{10})(\cos^2(\frac{\pi}{10})-\cos^2(\frac{3\pi}{10}))} + \frac{1}{1+\cos^2(\frac{3\pi}{10})}.\frac{u(u-\cos^2(\frac{\pi}{10}))}{\cos^2(\frac{3\pi}{10})(\cos^2(\frac{3\pi}{10})-\cos^2(\frac{\pi}{10}))} \\ &+ 1.\frac{(u-\cos^2(\frac{\pi}{10}))(u-\cos^2(\frac{3\pi}{10}))}{(-\cos^2(\frac{\pi}{10}))(-\cos^2(\frac{3\pi}{10}))} \end{aligned}$$

Exercice 3.

1. (3 pts) On écrit les conditions pour que la méthode de quadrature soit d'ordre 2 :

$$\begin{cases} a+b+c = 1 \\ \dfrac{b}{3} + \dfrac{c}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{b}{9} + \dfrac{c}{4} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

et on trouve facilement $(a, b, c) = (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2)$.

2. (a) (2 pts) M2 s'écrit

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx \simeq \frac{1}{3}f(0)$$

Cette méthode (rectangles à gauche) est d'ordre 0. M3 s'écrit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{2}f(\frac{1}{3})$$

Cette méthode est d'ordre 0.

(b) (1 pt) On note $f_n = f(t_n, y_n)$ et on a

$$y_{n+1} = y_n - \frac{1}{2}f_n + \frac{3}{2}f(t_n + \frac{\Delta T}{3}, y_n + \frac{\Delta T}{3}f_n) + 2f(t_n + \frac{\Delta T}{2}, y_n + \frac{\Delta T}{2}f(t_n + \frac{\Delta T}{3}, y_n + \frac{\Delta T}{3}f_n))$$

(c) (2 pts) La méthode est (au moins) d'ordre 2 car

$$-\frac{3}{2}.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$