Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - 3$^{\text{ème}}$ Année - Année 2017/2018
Analyse Numérique
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html

**EXAMEN MA650 ANALYSE NUMERIQUE, 25 mai 2018**

**Exercice 1.**

Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale réelle (${}^tQQ = I$) et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $A = I - Q$. On suppose que $\lambda = 1$ n'est pas valeur propre de $Q$, de sorte que la matrice $A = I - Q$ est inversible.

On rappelle que toute matrice orthogonale, est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que ses valeurs propres sont toutes de module 1.

1. On s'intéresse à la méthode itérative associée à la décomposition suivante de $A$ :

$$M = (1+\alpha)I, \quad N = \alpha I + Q.$$

   (a) Montrer que pour $\alpha = 0$ la méthode n'est pas convergente.

   (b) Montrer que la méthode est convergente pour tout $\alpha > 0$.

2. À présent on fait varier le coefficient $\alpha$ à chaque itération. On fait l'hypothèse que la suite $\alpha_k$ est bornée

$$\exists d \geq c > 0, \quad c \leq \alpha_k \leq d \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

   (a) On décompose l'erreur $e_k = x_k - x$ sur la base des vecteurs propres de $Q$ sous la forme $e_k = \sum_{j=1}^n a_j^k v_j$. Déterminer une relation de récurrence pour la suite $k \mapsto a_j^k$. Calculer $a_j^k$ en fonction de $a_j^0$ et des coefficients du problème.

   (b) Montrer que la méthode est convergente.

**Exercice 2.**

1. Montrer que le polynôme d'interpolation d'une fonction paire $f$ relativement aux zéros du polynôme de Tchebichev $T_5$ est pair.
2. Soit la fonction définie sur $[-1,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. En posant $u = x^2$, montrer que le calcul du polynôme d'interpolation $P(x)$ de $f$ relativement aux zéros de $T_5$ peut se ramener au calcul d'un polynôme d'interpolation $q(u)$ de degré plus petit.
3. Donner une expression de $q(u)$ puis en déduire une expression de $P(x)$.

**Exercice 3.**

On considère une méthode de quadrature (M) sur $[0,1]$ telle que

$$\int_0^1 f(u)du \simeq af(0) + bf(\frac{1}{3}) + cf(\frac{1}{2})$$

1. Déterminer les coefficients $a$ $b$ et $c$ pour que la méthode soit d'ordre 2.
2. On considère la méthode de Runge Kutta, définie par le tableau :

$$\begin{array}{cc|ccc} & 0 & 0 & & \\ (M2) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ (M3) & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ (M) & 1 & a & b & c \end{array}$$

   (a) Décrire les méthodes de quadrature (M2) et (M3) et donner leur ordre.

   (b) Ecrire l'algorithme définissant la méthode de Runge Kutta définie par ce tableau.

   (c) La méthode ainsi définie est-elle au moins d'ordre 2 ?