Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - 3ème Année - Année 2017/2018
Analyse Numérique
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html

**EXAMEN MA650 ANALYSE NUMERIQUE, SESSION 2**

**Exercice 1.**

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice tridiagonale telle que
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & ... & 0 \\ 1 & 2 & 1 & ... \\ .. & 1 & 2 & 1 \\ 0 & .. & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
Montrer que $\rho(A) \leq 4$.
2. Soit $A$ une matrice symétrique définie positive de taille $n$. On considère la méthode itérative définie par
$$M = \frac{D}{2} - E \quad \text{et} \quad N = -\frac{D}{2} + F$$
Montrer que $\det(M^{-1}N) = (-1)^n$. En déduire que cette méthode est bien définie mais ne converge pas.

**Exercice 2.**

On considère une méthode de quadrature élémentaire
$$\int_{-1}^{1} f(u)du \equiv \alpha(\beta f(u_0) + f(0) + f(u_2))$$
où $\alpha$ et $\beta$ sont des réels donnés et $u_0$ et $u_2$ sont deux points non nuls et distincts de l'intervalle $[-1, 1]$.

1. Déterminer les constantes $\alpha$ et $\beta$ et les points $u_0$ et $u_2$ pour que cette formule soit d'ordre 3.
2. On admet que pour de telles valeurs de $\alpha$, $\beta$, $u_0$ et $u_2$, si $f \in \mathcal{C}^4([-1, 1], \mathbb{R})$, l'erreur entre l'intégrale exacte de $f$ sur $[-1, 1]$ et sa valeur approchée est majorée par
$$|E(f)| \leq \frac{1}{360} ||f^{(4)}||_\infty$$
Décrire la méthode de quadrature élémentaire associée sur un intervalle de la forme $[a_0, a_0 + h]$ (et non plus sur $[-1, 1]$) et donner dans ce cas l'erreur commise.
3. A partir de cette méthode élémentaire, construire une méthode de quadrature pour approcher $\int_a^b f(x)dx$ à partir de toute subdivision régulière $a = x_0 < x_1, ..., < x_n = b$ et donner une majoration de l'erreur commise en fonction de $a$, $b$, $n$ et de $||f^{(4)}||_\infty$.

**Exercice 3.**

On considère la méthode de Runge Kutta, définie par le tableau :

$$\begin{array}{cc|ccc} & 0 & 0 & & \\ (M2) & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\ (M3) & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\ (M) & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8} \end{array}$$

1. Décrire les méthodes de quadrature (M2) et (M3) et donner leur ordre.
2. Ecrire l'algorithme définissant la méthode de Runge Kutta définie par ce tableau.
3. La méthode ainsi définie est-elle au moins d'ordre 2 ?