Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - 3$^{\text{ème}}$ Année - Année 2018/2019
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

CC1 MA650 ANALYSE NUMERIQUE, 26 février 2019

Exercice 1.

On a vu en cours que si A est définie positive et ${}^tM + N$ est définie positive, alors la méthode itérative associée à la décomposition (M, N) converge.

Dans cet exercice, on souhaite montrer la réciproque. Posons $B = M^{-1}N$. On admet le résultat suivant : Pour $y \in \mathbb{R}^n$, si on pose $z = By$, alors on a l'identité :

$$(y, Ay) - (z, Az) \; = \; (y - z, ({}^tM + N)(y - z)), \tag{1}$$

où $(\cdot, \cdot)$ est le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$.
On suppose dans la suite de l'exercice que la méthode itérative associée à la décomposition (M, N) converge et que ${}^tM + N$ est symétrique définie positive.

1. Rappeler la définition de la convergence d'une méthode itérative.
2. Montrer que A est symétrique.
3. Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ telle que $y_{n+1} = B(y_n) \; \forall \; n \; \geq \; 0$. Montrer que y_n tend vers 0.
4. Montrer que la suite (α_n) telle que $\alpha_n = (y_n, Ay_n)$ est décroissante et qu'elle converge vers 0.
5. Montrer que si $y_0 \neq 0$, alors $\alpha_1 < \alpha_0$.
6. Démontrer par l'absurde que A est symétrique définie positive.

Exercice 2.

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère une matrice carrée tridiagonale de la forme :

$$A \; = \begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & c_{n-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_n & b_n \end{bmatrix}$$

Pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$, on note A_k la matrice obtenue à partir de A en supprimant les $n - k$ dernières lignes et les $n - k$ dernières colonnes de A. On pose $\alpha_k = \det(A_k)$.

1. Montrer que la suite (α_k) vérifie la relation de récurrence :

$$\alpha_0 = 1, \alpha_1 = b_1, \quad \forall k \in \{2, .., n\}, \quad \alpha_k = b_k\alpha_{k-1} - a_kc_{k-1}\alpha_{k-2}.$$

2. On suppose que $\alpha_k \neq 0$ pour tout k tel que $1 \leq k \leq n$. Effectuer la factorisation LU de la matrice A. On pourra utiliser le résultat (vu en TD) que L et U n'ont que deux diagonales non nulles.

3. Calculer la factorisation LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Exercice 3.

Soit $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ une famille de points distincts de $\mathbb{R}$. On note $(l_i)_{0\leq i\leq n}$ la famille des polynômes de base de Lagrange associée à ces points.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Montrer que

$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1$$

2. Donner une expression simple des fonctions

$$g_j(x) = \sum_{i=0}^{n} x_i^j l_i(x)$$

pour tout $j \in \{0, ..., n\}$.