Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ème}}$ Année - Année 2018/2019
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

CC2 MA650 ANALYSE NUMERIQUE, 23 avril 2019

Exercice 1.

1. Calculer les 3 premiers polynômes de Legendre associés au poids $\omega(x) = 1$ sur $[-1, 1]$, L_0, L_1 et L_2, de norme 1, et de coefficient dominant strictement positif.
2. En déduire la meilleure approximation polynomiale de degré ≤ 2 au sens de la norme quadratique sur $[-1, 1]$ de $f(x) = e^x$.

Exercice 2.

Soit $f \in C^1([0, 1]$. On considère la formule de quadrature élémentaire :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq f(0) + \frac{1}{6}f'(0) + \frac{1}{3}f'(\frac{1}{2})$$

1. Montrer que cette méthode est d'ordre 3.
2. On admet que l'erreur $E(f)$ de la méthode précédente est majorée ainsi :

$$|E(f)| \leq \frac{1}{720}||f^{(4)}||_\infty$$

   pour toute fonction $f \in C^4([0, 1], \mathbb{R})$.
   A partir de cette méthode élémentaire, construire une méthode de quadrature pour approcher l'intégrale d'une fonction $f \in C([a, b], \mathbb{R})$ à partir de toute subdivision du type $a = x_0 < x_1 ... < x_n = b$ d'un intervalle $[a, b]$ et donner une majoration de l'erreur commise si f est C^4 sur $[a, b]$ en fonction de a, b, n et $.||f^{(4)}||_\infty$.

Exercice 3.

On considère une méthode de quadrature (M) sur $[0, 1]$ telle que

$$\int_0^1 f(u)du \simeq af(0) + bf(\frac{1}{3}) + cf(\frac{1}{2})$$

1. Déterminer les coefficients a b et c pour que la méthode soit au moins d'ordre 2.
2. On considère la méthode de Runge Kutta, définie par le tableau :

$$\begin{array}{cc|ccc} & 0 & 0 & & \\ (M2) & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ (M3) & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & \\ (M) & 1 & a & b & c \end{array}$$

   (a) Décrire les méthodes de quadrature (M2) et (M3).
   (b) Ecrire la méthode à un pas définissant y_{n+1} à partir de y_n associée ce tableau.
   (c) La méthode ainsi définie est-elle au moins d'ordre 2 ?