

TD n°1 : Norme Matricielle et Conditionnement d'une Matrice

Exercice 1. On définit l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{R}^+ définie par

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad N(A) = \sum_{i,j} |A_{i,j}|.$$

- i) Montrer que N est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- ii) La norme N est-elle une norme subordonnée ?
- iii) La norme N est-elle une norme matricielle (c'est à dire telle que $N(AB) \leq N(A)N(B)$) ?

Exercice 2. Normes subordonnées aux normes l_p Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ Montrer que

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^n |A_{i,j}| \right), \quad \text{et} \quad \|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \left(\sum_{j=1}^n |A_{i,j}| \right).$$

Exercice 3. Norme matricielle et rayon spectral Soit $N(A) = \max_{i,j} |A_{i,j}|$.

- i) Est-ce une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$?
- ii) Montrer que pour tout $n \geq 2$, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\rho(A) > N(A)$ (on rappelle que $\rho(A)$ est égal au maximum des modules des valeurs propres complexes de A)
- iii) La norme N est-elle une norme subordonnée ?

Exercice 4. Norme de Frobenius ou norme de Schur

(A) (a) Dans l'espace $M_n(\mathbb{R})$, on note \mathcal{S}_n l'ensemble des matrices symétriques et \mathcal{A}_n l'espace des matrices antisymétriques. Montrer

$$\mathcal{S}_n \oplus \mathcal{A}_n = M_n(\mathbb{R}).$$

(b) Montrer que l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$ définie de $M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall A, B \in M_n(\mathbb{R}) \quad \langle A, B \rangle = \text{tr}({}^t A B),$$

est un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$ et que pour ce produit scalaire

$$\mathcal{S}_n = (\mathcal{A}_n)^\perp.$$

(B) On définit

$$\|A\|_s = \sqrt{\text{tr}({}^t A \cdot A)}.$$

(a) Montrer que

$$\| \|A\| \|_s = \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}.$$

(b) Montrer que $\| \| \cdot \| \|_s$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ (on l'appelle norme de Schur).

(c) Montrer que $\| \| \cdot \| \|_s$ n'est pas une norme subordonnée à une norme vectorielle.

(d) Montrer que $\| \| \cdot \| \|_s$ est une norme matricielle.

(e) Montrer que $\rho(A) \leq \sqrt{\sum_{i,j} |A_{ij}|^2}$.

(f) Montrer que $\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \| \|A\| \|_2 \leq \| \|A\| \|_s \leq \sqrt{n} \| \|A\| \|_2$.

Exercice 5. Conditionnement d'une matrice Soient A et δA deux matrices appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que A et $A + \delta A$ soient inversibles. Le vecteur $b \in \mathbb{C}^n$ tel que $b \neq 0$ étant donné, on note x et $x + \delta x$ les solutions des systèmes linéaires :

$$Ax = b, \quad (A + \delta A)(x + \delta x) = b. \quad (1)$$

Montrer que

$$\frac{\| \delta x \|}{\| x + \delta x \|} \leq \text{cond}(A) \frac{\| \| \delta A \| \|}{\| \| A \| \|}, \quad (2)$$

et que cette inégalité est la meilleure possible : en effet, montrer que A étant fixée, on peut choisir b et δA tels que l'on ait égalité dans (2).

Exercice 6. Conditionnement du Laplacien discrétisé par différences finies

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, matrice carrée d'ordre n , représentant le Laplacien discret, définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Montrer que A est symétrique définie positive : on montrera que

$$(Ay, y) = \sum_{i=0}^n (y_{i+1} - y_i)^2, \quad \forall y \in \mathbb{R}^n, \text{ en posant } y_0 = y_{n+1} = 0$$

ii) Diagonaliser la matrice A dans le cas $n = 3$ (on peut remarquer l'existence d'une valeur propre évidente).

iii) On revient au cas général et on considère les vecteurs $v_k, k = 1, \dots, n$ suivants :

$$v_k = \left[\sin\left(\frac{k\pi}{n+1}\right), \sin\left(\frac{2k\pi}{n+1}\right), \dots, \sin\left(\frac{nk\pi}{n+1}\right) \right]^T, \quad k = 1, \dots, n.$$

Calculer Av_k , pour $k = 1, \dots, n$ et en déduire la diagonalisation de A .

iv) calculer un équivalent, lorsque n tend vers l'infini du conditionnement de A .