

TD n°3 : Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) La matrice A est-elle définie positive ?
- 2) La méthode de Jacobi converge-t-elle pour A ?
- 3) La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle pour A ?

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) La méthode de Jacobi converge-t-elle pour A ?
- 2) La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle pour A ?

Exercice 3.

- 1) Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si B est inversible alors

$$\rho(A) = \rho(B^{-1}AB). \quad (1)$$

- 2) Soit $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $(I + B)$ est inversible.

(a) Montrer que $B(I + B)^{-1} = I - (I + B)^{-1}$ et que $B(I + B)^{-1}$ est symétrique.

(b) Montrer l'équivalence suivante :

$$\rho(B(I + B)^{-1}) < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}I + B \text{ est définie positive.} \quad (2)$$

(Ind : On pourra exprimer les valeurs propres de $B(I + B)^{-1}$ en fonction de celles de B .)

Dans toute la suite de l'exercice, on considère $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ symétrique inversible et $b \in \mathbb{R}^n$. On décompose A sous la forme

$$A = rI + H + V \quad (3)$$

où r est un réel strictement positif, H et V sont des matrices symétriques telles que $rI + H$ et $rI + V$ sont inversibles.

Pour la résolution du système $Ax = b$, on considère la méthode itérative définie par la suite $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$ suivante :

$$\begin{cases} x_0 \in \mathbf{R}^n \text{ est donné, et pour tout } k \in \mathbf{N} \\ \text{on pose } y_k \text{ tel que } (rI + H)y_k = -Vx_k + b, \\ (rI + V)x_{k+1} = -Hy_k + b. \end{cases} \quad (4)$$

3) Montrer que la méthode itérative (4) converge si et seulement si

$$\rho(L) < 1 \quad \text{où} \quad L = (rI + V)^{-1}H(rI + H)^{-1}V \quad (5)$$

4) On pose $B = \frac{1}{r}H$ et $C = \frac{1}{r}V$.

(a) Exprimer la matrice L en fonction de B et C .

(b) En utilisant le fait que $\|M\|_2 = \rho(M)$ pour toute matrice carrée M symétrique, montrer que

$$\rho(L) \leq \rho(B(I + B)^{-1})\rho(C(I + C)^{-1}). \quad (6)$$

5) En déduire que si $\frac{r}{2}I + H$ et $\frac{r}{2}I + V$ sont définies positives, la méthode itérative (4) converge.

6) Déterminer alors la limite de la suite $(x_k)_{k \in \mathbf{N}}$.

Exercice 4. Méthode du gradient à pas constant Soient A une matrice carrée d'ordre n , inversible, dont toutes les valeurs propres (dans \mathbb{C}) sont réelles et b un vecteur donné de \mathbf{R}^n . On désigne par x la solution du système linéaire $Ax = b$, où $b \in \mathbf{R}^n$ est donné et par $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de A .

Soit $\alpha \in \mathbf{R}^*$. On définit la suite $(x^{(k)})_{k \in \mathbf{N}}$ par

$$(I) \quad \begin{cases} x^0 \text{ donné,} & x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha r_k \\ \text{où } r_k = A(x^{(k)}) - b \end{cases} \quad (7)$$

1) Déterminer la matrice $B_\alpha \in \mathbf{R}^{n,n}$ et le vecteur c tels que

$$x^{(k+1)} = B_\alpha x^{(k)} + c$$

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la méthode (I) converge, en fonction des $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$.

3) Montrer que si les valeurs propres de A ne sont pas de même signe, la méthode ne converge pas.

4) On suppose dans la suite de l'exercice que toutes les valeurs propres de A sont positives.

a) Montrer que la méthode converge si et seulement si $0 < \alpha < C$ où C est à déterminer en fonction des valeurs propres de A .

b) On pose $f_i : \alpha \in \mathbf{R}^+ \rightarrow f_i(\alpha) = |1 - \alpha\lambda_i|$. Représenter graphiquement les courbes des f_1, \dots, f_n sur une même figure.

c) En déduire le paramètre α optimal, noté α_{opt} , pour lequel la méthode converge la plus vite.

d) On suppose que A est symétrique. Calculer alors, $\rho(B_{\alpha_{\text{opt}}})$, en fonction de $k_2(A)$ (conditionnement de la matrice A pour la norme $\|\cdot\|_2$). Que dire de la méthode si la matrice A est mal conditionnée?