

TD n°6 : Méthodes de quadrature

Exercice 1.

On considère une méthode de quadrature élémentaire

$$\int_{-1}^1 f(u) du \equiv \alpha(\beta f(u_0) + f(0) + f(u_2))$$

où α et β sont des réels donnés et u_0 et u_2 sont deux points non nuls et distincts de l'intervalle $[-1, 1]$.

- i) Déterminer les constantes α et β et les points u_0 et u_2 pour que cette formule soit d'ordre 3.
- ii) On admet que pour de telles valeurs de α , β , u_0 et u_2 , si $f \in \mathcal{C}^4([-1, 1], \mathbb{R})$, l'erreur entre l'intégrale exacte de f sur $[-1, 1]$ et sa valeur approchée est majorée par

$$|E(f)| \leq \frac{1}{360} \|f^{(4)}\|_{\infty}$$

Décrire la méthode de quadrature élémentaire associée sur un intervalle de la forme $[a_0, a_0 + h]$ (et non plus sur $[-1, 1]$) et donner dans ce cas l'erreur commise.

- iii) A partir de cette méthode élémentaire, construire une méthode de quadrature pour approcher $\int_a^b f(x) dx$ à partir de toute subdivision régulière $a = x_0 < x_1, \dots, < x_n = b$ et donner une majoration de l'erreur commise en fonction de a , b , n et de $\|f^{(4)}\|_{\infty}$.

Exercice 2. Une nouvelle formule d'intégration numérique : Posons pour $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$:

$$I(f) = \omega_a f(a) + \omega_b f(b) + \omega'_a f'(a) + \omega'_b f'(b). \quad (1)$$

- i) Trouver ω_a , ω_b , ω'_a et ω'_b pour que $I(f)$ approchant $\int_a^b f(x) dx$ soit d'ordre 3. On supposera d'abord que $[a, b] = [-1, 1]$ puis on se ramènera au cas général.
- ii) Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}^4$ défini par $\varphi(P) = (P(a), P'(a), P(b), P'(b))$ est un isomorphisme. En déduire que pour tout $f \in \mathcal{C}^1([a, b])$, il existe un unique polynôme noté $P_f \in \mathbb{R}_3[X]$ tel que $P_f(a) = f(a)$, $P'_f(a) = f'(a)$, $P_f(b) = f(b)$ et $P'_f(b) = f'(b)$.
- iii) On pose $E(f) = \int_a^b f(x) dx - I(f)$. Montrer que $E(f) = \int_a^b (f(x) - P_f(x)) dx$.
- iv) On admet le résultat suivant : On suppose que $f \in \mathcal{C}^4([a, b])$. Alors pour tout $x \in [a, b]$, il existe $\xi_x \in]a, b[$ tel que

$$f(x) - P_f(x) = \frac{1}{4!} (x-a)^2 (x-b)^2 f^{(4)}(\xi_x). \quad (2)$$

et tel que $x \rightarrow f^{(4)}(\xi_x)$ est continue sur $[a, b]$. Montrer qu'il existe $C > 0$ (à déterminer) tel que

$$\forall f \in \mathcal{C}^4([a, b]) \quad \exists \xi \in [a, b] \quad \text{t.q.} \quad E(f) = C(b-a)^5 f^{(4)}(\xi). \quad (3)$$

- v) Ecrire la formule de quadrature composée approchant $\int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$ associée à la formule de quadrature élémentaire (1), où on a discrétisé le segment $[\alpha, \beta]$ en p segments égaux (on pose $h = \frac{(\beta - \alpha)}{p}$).
- vi) Montrer que l'erreur de la formule composée est en $\mathcal{O}(h^N)$ où N est un entier que l'on déterminera.

Exercice 3.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_t^n pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_t^n(x) = ((x - t)_+)^n = (\max(x - t, 0))^n$$

- i) Représenter graphiquement les fonction f_{-1}^1 , f_0^2 et f_1^1 .
- ii) Pour toute fonction réelle f , on note $E(f)$ l'erreur de quadrature pour la méthode élémentaire des trapèzes sur $[-1, 1]$:

$$E(f) = \int_{-1}^1 f(x) dx - (f(-1) + f(1))$$

On note N l'ordre de cette méthode. Rappeler pourquoi $N = 1$.

- iii) Calculer explicitement la fonction K définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$K(t) = E(f_t^N)$$

avec $N = 1$ (ordre de la méthode des trapèzes).

On distinguera les cas $t \in]-1, 1[$ et $t \notin]-1, 1[$.

- iv) Reprendre le calcul précédent en remplaçant la méthode des trapèzes par la méthode de Simpson élémentaire sur $[-1, 1]$ (on veillera à calculer la nouvelle valeur de N).

Exercice 4. Erreur de l'intégration numérique de Gauss-Legendre

Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$.

On pose $I(f) = \int_{-1}^1 f(t) dt$ et $J(f) = \int_{-1}^1 P_f(t) dt$ où P_f désigne le polynôme d'interpolation de f aux $n+1$ points de Legendre (racines du n -ème polynôme de Legendre).

On note $M = \sup_{t \in [-1, 1]} |f^{(2n+2)}(t)|$.

- i) Soit T_f la partie régulière du développement de Taylor de f à l'ordre $2n+1$ en 0. En utilisant une formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|I(f) - I(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+3)!}. \quad (4)$$

ii) Démontrer de même que

$$|J(f) - J(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+2)!}. \quad (5)$$

iii) En déduire une majoration de $|I(f) - J(f)|$.

iv) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 1$ (formule à 2 points d'ordre 3).

v) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 2$ (formule à 3 points d'ordre 5).

Exercice 5. Autour de la méthode de Simpson

i) Soit $a > 0$ et $g \in C^5(]-a, a[, \mathbb{R})$, impaire. Montrer que si $|x| < a$, il existe un réel ξ entre 0 et x tel que

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180}g^{(5)}(\xi)$$

(Indication : considérer la fonction auxiliaire $h(t) = g(t) - \frac{t}{3}(g'(t) + 2g'(0)) + \frac{\alpha}{180}t^5$ avec α tel que $h(x) = 0$).

ii) Soit $f \in C^5([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6} \left[f'(a) + f'(b) + 4f'\left(\frac{a+b}{2}\right) \right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi).$$

En déduire une estimation de l'erreur commise par la méthode de Simpson appliquée à une fonction $g \in C^4([a, b], \mathbb{R})$.

iii) a) Donner la valeur de $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$.

b) Simplifier l'expression $J = 4 \cdot \frac{1}{6} \left(\frac{1}{1+0^2} + 4 \cdot \frac{1}{1+\frac{1}{2}} + \frac{1}{1+1^2} \right)$ et vérifier que c'est une valeur approchée de π à 10^{-2} près.

c) Majorer la valeur absolue de la dérivée quatrième de $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ sur $[0, 1]$ et déduire de la question 2 le nombre d'intervalles intervenant dans une subdivision régulière de $[0, 1]$ pour obtenir les 25 premiers chiffres de l'écriture décimale de π .