Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ème}}$ Année - Année 2018/2019
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

EXAMEN MA650 ANALYSE NUMERIQUE, 13 mai 2019, corrigé

Exercice 1.

1. (*4pts*) Par construction, la famille $\{q_1, q_2, ..., q_n\}$ est l'orthonormalisée de Gram Schmidt de la base $\{a_1, ..., a_n\}$ (peut se montrer par récurrence). La matrice Q est donc orthogonale. De plus,
$$a_i = r_{i,i}q_i + \sum_{k=1}^{i-1} r_{k,i}q_k = \sum_{k=1}^{n} r_{k,i}q_k$$
ce qui correspond exactement à $A = QR$ matriciellement.
2. (*2pts*) On suppose $Q_1R_1 = Q_2R_2$ soit ${}^tQ_2Q_1 = R_2R_1^{-1}$ et ensuite
$$(R_2R_1^{-1})^t(R_2R_1^{-1}) = ({}^tQ_2Q_1)^t({}^tQ_2Q_1) =^t Q_2Q_1^tQ_1Q_2 = I_n$$
Comme $B = R_2R_1^{-1}$ est une matrice triangulaire supérieure à coefficients diagonaux strictement positifs on a par unicité de Choleski que $R_2R_1^{-1} = I_n$ soit $R_1 = R_2$ puis $Q_1 = Q_2$.
3. (*4pts*) On utilise la formule proposée pour trouver Q puis R :
$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
et
$$R = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$
4. (*2pts*) Pour résoudre $Ax = b$ on résout alors $Rx =^t Qb$ en $O(n^2)$ opérations par un principe de remontée (sachant que le produit ${}^tQb$ s'effectue aussi en $O(n^2)$ opérations).

Exercice 2.

1. (*2 pts*) Le meilleur choix possible, c'est à dire pour avoir une formule d'ordre le plus élevé, est de prendre les points $\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\}$ qui permettent d'avoir une approximation d'ordre 3. On peut aussi prendre les points 0 et 1 et utiliser la méthode des trapèzes mais la méthode est d'ordre 1 seulement. Dans le premier cas, on trouve
$$I \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}})^2} + \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}})^2}\right) = \frac{48}{61} \simeq 0.78688$$
Dans le second cas, on trouve
$$I \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 + 0^2} + \frac{1}{1 + (1)^2}\right) = \frac{3}{4}$$
2. (*2 pts*) Avec les points $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, on utilise la formule de Simpson et donc cette fois-ci :
$$I \simeq \frac{1}{6}\frac{1}{1 + 0^2} + \frac{4}{6}\frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{6}\frac{1}{1 + (1)^2} = \frac{47}{60} \simeq 0.78333$$
Remarque : la valeur exacte de I est de $\frac{\pi}{4} \simeq 0.78539$

3. (*2 pts*) En utilisant $N+1$ points $x_0 = 1 < x_1 = h = \frac{1}{N} < ... < x_N = 1$, on utilise une méthode composée avec la méthode de Gauss-Legendre à 2 points sur chaque intervalle élémentaire ou la méthode de Simpson. Dans les deux cas, cela nécessite d'utiliser $2N$ points (ou $2N+1$) pour un ordre de grandeur de l'erreur en $O(\frac{1}{N^4})$ (ordre 3 dans les deux cas). On pourrait aussi utiliser une méthode à N points qui soit d'ordre $2N-1$. Cependant, si N est grand, cela nécessite un calcul de racines de polynômes trop complexe.

Exercice 3.

1. (*3 pts*) On choisit de prendre 101 points sur $[0,1]$, soit $\Delta T = \frac{1}{100}$, et la suite d'approximations vérifie :
$$y_{n+1} = y_n + \Delta T(-150 y_n + 50)$$
soit $y_{n+1} = -\frac{1}{2} y_n + \frac{1}{2}$ dont la solution vérifie (suite de type arithmetico-géométrique) :
$$y_n = (y_0 - \frac{1}{3})(-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{3}$$
On trouve alors
$$y_{100} = (\frac{1}{30})(-\frac{1}{2})^{100} + \frac{1}{3} \simeq \frac{1}{3}$$

2. (*3 pts*) Par la méthode de variation de la constante, on trouve que $y(t) = \frac{1}{3}$. L'approximation de $y(1)$ est donc très bonne. En fait, il est même possible de prendre un nombre de points inférieur, il suffit simplement que $1 - 150\Delta T > -1$ soit $\Delta T < \frac{1}{75}$ ou $N > 75$. A partir de 76 points, l'approximation sera très bonne (et très mauvaise avant).