Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - 3$^{\text{ème}}$ Année - Année 2018/2019
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

EXAMEN MA650 ANALYSE NUMERIQUE, 13 mai 2019

Exercice 1.

Pour résoudre un système linéaire du type $Ax = b$ avec A matrice inversible de taille n, on définit le principe de factorisation suivant : $A = QR$ avec Q une matrice dont les colonnes, notées q_i, s'écrivent en fonction des colonnes de A (notées a_i) de la manière suivante :

$$q_i = \frac{a_i - \sum_{k=1}^{i-1} < q_k, a_i > q_k}{||a_i - \sum_{k=1}^{i-1} < q_k, a_i > q_k||}$$

et R une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients s'écrivent : $r_{k,i} =< q_k, a_i >$ si $1 \leq k \leq i-1$ et

$$r_{i,i} = ||a_i - \sum_{k=1}^{i-1} < q_k, a_i > q_k||$$

1. Vérifier qu'on a bien $A = QR$ et que Q est une matrice orthogonale.
2. Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) tel que Q est orthogonale, R est triangulaire supérieure avec des coefficient diagonaux strictement positifs et $A = QR$ (on pourra utiliser l'uncité de la décomposition de Cholesky de la matrice identité).
3. Calculer la factorisation QR de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.
4. Expliquer en quoi cette factorisation, une fois effectuée, permet de résoudre un système linéaire du type $Ax = b$ en $O(n^2)$ opérations.

Exercice 2.

On souhaite approcher l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

en utilisant le moins de points possibles dans la formule de quadrature.

1. Quel choix de points proposez vous si on ne veut utiliser que deux points et que donne dans ce cas la valeur approchée de I ? On justifiera la réponse.
2. Avec les points $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, quel choix de poids proposez vous ? Que donne alors la valeur approchée de I ?
3. Proposer une stratégie efficace d'évaluation de I en utilisant N points et quel serait l'ordre de grandeur de l'erreur commise ?

Exercice 3.

On souhaite appliquer la méthode d'Euler pour approcher la solution de l'équation différentielle suivante sur $[0, 1]$:

$$y'(t) = -150y(t) + 50$$

avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{3}$.

1. En prenant une subdivision régulière de 100 points et une valeur initiale $y_0 = 0.3$, que vaut la valeur approchée obtenue pour $y(1)$ par cette méthode ? On pourra remarquer que la suite étudiée est de type arithmetico-géométrique.
2. Comparer avec la valeur exacte et commenter le résultat. Quel nombre de points préconisez vous pour obtenir une bonne approximation de $y(1)$?