CC1 MA650 ANALYSE NUMERIQUE, 10 mars 2020, CORRECTION

Exercice 1. (5 pts)

On peut vérifier (même si ce n'est pas utile) que les déterminants mineurs principaux de A sont tous non nuls. Ceci assure que A possède une factorisation LU.

Après les opérations $L_2 \rightarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \rightarrow L_3 + L_1$, A devient $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -8 \end{pmatrix}$ puis

après l'opération $L_3 \rightarrow L_3 + 2L_2$, A devient $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ Au final, d'après le cours, on a

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. (4 pts)

Soit A une matrice symétrique définie positive, de type bande, c'est à dire telle que $a_{i,j} = 0$ si $|i - j| \geq l$ où l est un entier non nul. Par le cours, il existe B triangulaire inférieure telle que $A = B^t B$ soit

$$a_{i,j} = \sum_{k=1}^{\min(i,j)} b_{i,k} b_{j,k} \quad (1)$$

On montre par récurrence sur le numéro des colonnes de B (c'est à dire sur j) que $b_{i,j} = 0$ si $|i - j| \geq l$.

Pour $j = 1$, cela vient directement de la relation (1) qui s'écrit :

$$b_{i,1} = \frac{a_{i,1}}{b_{1,1}}$$

Si on suppose la propriété vraie au rang $j - 1$, on a

$$a_{j+l+1,j} = \sum_{k=1}^j b_{j+l+1,k} b_{j,k} = b_{j+l+1,j} b_{j,j}$$

par hypothèse de récurrence. Comme $a_{j+l+1,j} = 0$, on a donc $b_{j+l+1,j} = 0$ ainsi que pour tous les autres termes sur la j ème colonne de B .

Exercice 3. (11pts)

1. (3pts)

On a $J = D^{-1}(E + F)$, ce qui permet d'écrire

$$C_J(\lambda) = \det(D^{-1}(E + F) - \lambda I) = \det(D^{-1}((E + F) - \lambda D))$$

soit

$$C_J(\lambda) = \det(-D^{-1}) \det(\lambda D - E - F)$$

De même $\mathcal{L}_1 = (D - E)^{-1} F$ et

$$C_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \det((\lambda^2 I - (D - E)^{-1} F)) = \det((D - E)^{-1} (\lambda^2 (D - E) - F)).$$

soit

$$C_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \det((D - E)^{-1}) \det(\lambda^2 D - \lambda^2 E - F).$$

2. (3pts)

Un calcul simple montre que $Q(\mu)^{-1}A(\mu)Q(\mu) = A(1)$. En prenant le déterminant de cette expression, on trouve que

$$\det(A(\mu)) = \det(A(1)).$$

3. (3pts)

On utilise le résultat de la question précédente pour remarquer que pour A tridiagonale

$$\det(\lambda D - \lambda E - \frac{1}{\lambda}F) = \det(\lambda D - E - F)$$

soit

$$C_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \det((D - E)^{-1})\lambda^n \frac{C_J(\lambda)}{\det(-D^{-1})}$$

On en déduit que dans tous les cas, la plus grande racine en module de $C_{\mathcal{L}_1}$ est égale au carré de la plus grande racine en module de C_J , soit le résultat demandé.

4. (2pts) Les deux méthodes convergent simultanément car $\rho(J) < 1$ équivaut à $\rho(\mathcal{L}_1) < 1$ et la méthode de Gauss Seidel converge plus vite que Jacobi car on a dans ce cas $\rho(\mathcal{L}_1) < \rho(J)$.

Exercice 4. (4pts)

1. (1 pt)

On a par le cours

$$f(x) - P_n(x) = \frac{\prod_{i=0}^n (x - x_i)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

pour un certain $\xi \in [a, b]$.

2. (3 pts) Pour $f(x) = \frac{1}{x}$, on a

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} (n+1)! x^{-(n+2)}$$

Comme $x \in [2, 3]$, on a $|x - x_i| \leq 1$, soit pour tout $x \in [2, 3]$,

$$|f(x) - P_n(x)| \leq \frac{1}{\xi^{n+2}} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

ce qui implique bien la convergence uniforme de P_n vers f sur $[2, 3]$.