Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ème}}$ Année - Année 2019/2020
Analyse Numérique
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html

CC1 MA650 ANALYSE NUMERIQUE, 10 mars 2020 (version B)

Exercice 1.

Calculer (si elle existe) la factorisation LU de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & -1 & 5 \\ -2 & -1 & -9 \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

Sans utiliser le résultat analogue démontré en exercice pour la factorisation LU, montrer que la factorisation de Cholesky d'une matrice définie positive conserve la structure bande d'une matrice.

Exercice 3.

On considère une matrice A tridiagonale de la forme

$$A = \begin{pmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a_{n-1} & b_{n-1} & c_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 & a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

et on s'intéresse aux méthode de Jacobi et Gauss Seidel. pour résoudre un système linéaire du type $Ax = b$. On note J, respectivement $\mathcal{L}_1$ les matrices (de type $M^{-1}N$) associées aux deux méthodes respectives.

On écrit aussi classiquement $A = D - E - F$ où $-E$ et $-F$ désignent les parties inférieures, respectivement supérieures de A. On note enfin C_J respectivement $C_{\mathcal{L}_1}$ les polynômes caractéristiques de J et $\mathcal{L}_1$.

1. Montrer que

$$C_J(\lambda) = \det(-D^{-1}) \det(\lambda D - E - F)$$

et

$$C_{\mathcal{L}_1}(\lambda^2) = \det((D - E)^{-1}) \det(\lambda^2 D - \lambda^2 E - F).$$

2. Soit $\mu \in \mathbb{C}^*$ et $A(\mu)$ la matrice tridiagonale :

$$A(\mu) = \begin{pmatrix} b_1 & \frac{c_1}{\mu} & 0 & \dots & 0 \\ \mu a_2 & b_2 & \frac{c_2}{\mu} & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \mu a_{n-1} & b_{n-1} & \frac{c_{n-1}}{\mu} \\ 0 & \dots & 0 & \mu a_n & b_n \end{pmatrix}.$$

Montrer que $\det A(\mu)$ est une constante indépendante de μ (on pourra calculer $Q(\mu)^{-1} A(\mu) Q(\mu)$ avec $Q(\mu) = \mathrm{diag}(\mu, ..., \mu^n)$).

3. En déduire que pour une matrice A tridiagonale, les méthodes de Jacobi et Gauss Seidel (si elles existent) vérifient
$$\rho(\mathcal{L}_1) = \rho(J)^2.$$
4. En déduire que les deux méthodes convergent simultanément et la méthode de Gauss Seidel converge plus vite (de manière générale) que la méthode de Jacobi.

Exercice 4.

Soit f une fonction dans $C^\infty([a,b],\mathbb{R})$ et P_n son polynôme d'interpolation de Lagrange en $(n+1)$ points uniformément répartis sur $[a,b]$.

1. Rappeler l'estimation obtenue de l'erreur $f(x) - P(x)$ en $x \in [a,b]$.
2. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{1}{x}$ sur $[2,3]$. Montrer que le polynôme d'interpolation de Lagrange P_n précédemment défini converge uniformément sur $[2,3]$ vers f lorsque n tend vers $+\infty$.