Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - 3$^{\text{ième}}$ Année - Année 2019/2020
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

TD n^{o}2 : Méthodes directes de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1.

i) Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ admet une décomposition LU que l'on déterminera.

ii) Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 12 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 12 & 2 & 49 & -4 \\ -6 & 1 & -4 & 51 \end{pmatrix}$ admet une décomposition de Cholesky que l'on déterminera.

Exercice 2. Soit A une matrice carrée $n \times n$ dont toutes les sous-matrices diagonales sont inversibles.

i) Montrer qu'il existe
— une matrice triangulaire inférieure L à diagonale unité (*i.e.* $L_{i,i} = 1$),
— une matrice triangulaire supérieure S à diagonale unité,
— une matrice diagonale D
telles que

$$A = LDS. \tag{1}$$

ii) Montrer que cette décomposition est unique.

iii) Montrer que si A est symétrique, la décomposition (1) devient :

$$A = LDL^T.$$

iv) Retrouver la décomposition de Cholesky dans le cas où la matrice A est symétrique définie positive.

v) Montrer que si la matrice A est symétrique mais pas définie positive, on peut factoriser A sous la forme

$$A = B\tilde{B}^T,$$

où B est une matrice triangulaire inférieure et $\tilde{B}$ une matrice dont chaque colonne est soit égale à la colonne correspondante de B, soit égale à cette colonne changée de signe.

vi) Appliquer cette factorisation à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. <u>Conservation de la structure bande d'une matrice par décomposition LU</u> Le but de l'exercie est de montrer que si A a une structure bande c'est-à-dire si il existe $p \in \{0, .., n-1\}$ tel que $A_{i,j} = 0$ pour tout i, j tel que $|i-j| > p$ alors il en est de même pour L et U.
Remarque : A est nulle en dehors des $2p+1$ diagonales centrales et A a la forme suivante :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,p+1} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_{p+1,1} & & \ddots & & \ddots & 0 \\ & \ddots & & \ddots & & a_{n-p,n} \\ 0 & & \ddots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{n-p,n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

On fixe l'indice k tel que $\underline{k \geq p+2}$, alors A vérifie A_{kj} et A_{jk} sont nuls pour j compris entre 1 et $k-(p+1)$.

i) Montrer par récurrence sur j que sur la $k^{\text{ième}}$ ligne de L, on a : $L_{kj} = 0$ pour $1 \leq j \leq k-(p+1)$.

ii) Montrer par récurrence sur j que sur la $k^{\text{ième}}$ colonne de U, on a $U_{jk} = 0$ pour $1 \leq j \leq k-(p+1)$.

Exercice 4. Pour N entier, on définit la matrice tridiagonale d'ordre N (matrice du Laplacien discrétisé) :

$$A_N = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

i) Calculer la factorisation de Cholesky de la matrice A_4.

ii) Calculer la factorisation de Cholesky de la matrice A_N.

Exercice 5.

Supposons que les nombres soient représentés en virgule flottante dans une base décimale avec 3 chiffres significatifs et que le résultat des opérations est arrondi à 3 chiffres significatifs. Soit le système linéaire $Ax = b$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 10^{-4} & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

i) Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme premier pivot 10^{-4}.

ii) Résoudre par la méthode d'élimination de Gauss en choisissant comme ligne pivot à la première étape, la deuxième ligne.

iii) Conclure.