Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ième}}$ Année - Année 2019/2020
Analyse Numérique
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html

TD n°3 : Méthodes itératives de résolution de systèmes linéaires

Exercice 1. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & 1 & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{3}{4} & 1 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle définie positive ?
2) La méthode de Jacobi converge-t-elle pour A ?
3) La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle pour A ?

Exercice 2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) La méthode de Jacobi converge-t-elle pour A ?
2) La méthode de Gauss-Seidel converge-t-elle pour A ?

Exercice 3.

Soit $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale réelle (${}^tQQ = I$) et $b \in \mathbb{R}^n$. Soit $A = I - Q$. On suppose que $\lambda = 1$ n'est pas valeur propre de Q, de sorte que la matrice $A = I - Q$ est inversible.

On rappelle que toute matrice orthogonale, est diagonalisable sur $\mathcal{C}$ et que ses valeurs propres sont toutes de module 1.

i) On s'intéresse à la méthode itérative associée à la décomposition suivante de A :

$$M = (1+\alpha)I, \quad N = \alpha I + Q.$$

(a) Montrer que pour $\alpha = 0$ la méthode n'est pas convergente.

(b) Montrer que la méthode est convergente pour tout $\alpha > 0$.

ii) À présent on fait varier le coefficient α à chaque itération. On fait l'hypothèse que la suite α_k est bornée

$$\exists d \geq c > 0, \quad c \leq \alpha_k \leq d \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

(a) On décompose l'erreur $e_k = x_k - x$ sur la base des vecteurs propres de Q sous la forme $e_k = \sum_{j=1}^n a_j^k v_j$. Déterminer une relation de récurrence pour la suite $k \mapsto a_j^k$. Calculer a_j^k en fonction de a_j^0 et des coefficients du problème.

(b) Montrer que la méthode est convergente.

Exercice 4. Méthode du gradient à pas constant Soient A une matrice carrée d'ordre n, inversible, dont toutes les valeurs propres (dans $\mathbb{C}$) sont réelles et b un vecteur donné de $\mathbb{R}^n$. On désigne par x la solution du système linéaire $Ax = b$, où $b \in \mathbb{R}^n$ est donné et par $\lambda_1, .., \lambda_n$ les valeurs propres de A.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On définit la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$(I) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^0\text{donné}, \qquad x^{(k+1)} \;=\; x^k - \alpha r_k \\ \text{où } r_k = A(x^{(k)}) - b \end{array} \right. \tag{1}$$

1) Déterminer la matrice $B_\alpha \in \mathbb{R}^{n,n}$ et le vecteur c tels que

$$x^{(k+1)} = B_\alpha x^{(k)} + c$$

2) Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que la méthode (I) converge, en fonction des $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$.
3) Montrer que si les valeurs propres de A ne sont pas de même signe, la méthode ne converge pas.
4) On suppose dans la suite de l'exercice que toutes les valeurs propres de A sont positives.
a) Montrer que la méthode converge si et seulement si $0 < \alpha < C$ où C est à déterminer en fonction des valeurs propres de A.
b) On pose $f_i : \alpha \in \mathbb{R}^+ \to f_i(\alpha) = |1 - \alpha\lambda_i|$. Représenter graphiquement les courbes des $f_1, .., f_n$ sur une même figure.
c) En déduire le paramètre α optimal, noté α_{opt}, pour lequel la méthode converge la plus vite.
d) On suppose que A est symétrique. Calculer alors, $\rho(B_{\alpha_{\text{opt}}})$, en fonction de $k_2(A)$ (conditionnement de la matrice A pour la norme $\|\|\cdot\|\|_2$). Que dire de la méthode si la matrice A est mal conditionnée ?