Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - 3^{iéme} Année - Année 2019/2020
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

TD n°5 : Approximation par des fonctions polynomiales

Exercice 1.

Déterminer la meilleure approximation polynomiale de degré ≤ 1 au sens de la norme quadratique sur $[-1, 1]$ de $f(x) = x^3$.

Exercice 2. Polynômes orthogonaux

Soit $]a, b[$ un intervalle, borné ou non, de $\mathbb{R}$. Par définition, un *poids* w est une fonction continue, positive $w :]a, b[\to]0, +\infty[$ avec la propriété suivante : l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |x|^n \, w(x) \, dx$ est convergente pour tout entier n.

L'espace vectoriel (E) des fonctions f continues sur $]a, b[$, telles que :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, w(x) \, dx} < +\infty,$$

sera muni du produit scalaire naturel :

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x) \, w(x) \, dx.$$

a) On a vu en cours qu'il existe une suite unique de polynômes unitaires (p_n), $\deg(p_n) = n$, orthogonaux pour un poids donné w. Montrer que les polynômes p_n vérifient la relation de récurrence :

$$p_n(x) = (x - \lambda_n) \, p_{n-1}(x) - \mu_n \, p_{n-2}(x), \quad n \geq 2,$$

avec

$$\lambda_n = \frac{< xp_{n-1}, p_{n-1} >}{\|p_{n-1}\|_2^2}, \qquad \mu_n = \frac{\|p_{n-1}\|_2^2}{\|p_{n-2}\|_2^2}.$$

b) Montrer que les polynômes p_n sont scindés à racines simples, toutes dans $]a, b[$.

Exercice 3. Polynômes deTchebichev

a) Montrer que les polynômes de Tchebichev $t_n(x) = \cos(n \arccos x), x \in [-1, 1]$ sont deux à deux orthogonaux, relativement au poids $w(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

b) Montrer que les polynômes t_n vérifient la relation de récurrence :

$$t_{n+1}(x) = 2x \, t_n(x) - t_{n-1}(x)$$

Exercice 4. Polynômes de Legendre On pose $(f, g) = \displaystyle\int_{-1}^1 f(x)g(x)$ et pour tout entier n on définit le polynôme P_n par

$$Q_n(X) = (X^2 - 1)^n, \; P_n(X) = \frac{n!}{(2n)!} Q_n^{(n)}.$$

i) Déterminer le degré de P_n ainsi que le coefficient du terme de plus haut degré.

ii) Justifier que $(P_0, \cdots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

iii) En utilisant la formule de Leibnitz, déterminer $P_n(1)$ et $P_n(-1)$.

iv) Déterminer les racines de Q_n ainsi que leur multiplicité.

v) Montrer que P_n a au moins n racines dans l'intervalle $]-1, 1[$.

vi) Donner le nombre exact de racines de P_n ainsi que leur multiplicité.

vii) Etablir que $\forall P, Q \in \mathbb{R}[X]$ on a :

$$\int_{-1}^{1} P^{(n+1)}(t)Q(t)\,dt \;=\; \sum_{k=0}^{n} \Big[P^{(n-k)}(t)Q^{(k)}(t)\Big]_{-1}^{1} + (-1)^{n+1}\int_{-1}^{1} P(t)Q^{(n+1)}(t)\,dt. \tag{1}$$

viii) En déduire que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} P_n(t)Q(t)\,dt \;=\; 0$