Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Maths-Physique, Maths-Méca - $3^{\text{ième}}$ année 2019/2020
Analyse Numérique

TD n°6 : Méthodes de quadrature

Exercice 1.

On considère une méthode de quadrature élémentaire

$$\int_{-1}^{1} f(u)du \equiv \alpha(\beta f(u_0) + f(0) + f(u_2))$$

où α et β sont des réels donnés et u_0 et u_2 sont deux points non nuls et distincts de l'intervalle $[-1, 1]$.

i) Déterminer les constantes α et β et les points u_0 et u_2 pour que cette formule soit d'ordre 3.

ii) On admet que pour de telles valeurs de α, β, u_0 et u_2, si $f \in \mathcal{C}^4([-1, 1], \mathbb{R})$, l'erreur entre l'intégrale exacte de f sur $[-1, 1]$ et sa valeur approchée est majorée par

$$|E(f)| \leq \frac{1}{360}||f^{(4)}||_\infty$$

Décrire la méthode de quadrature élémentaire associée sur un intervalle de la forme $[a_0, a_0 + h]$ (et non plus sur $[-1, 1]$) et donner dans ce cas l'erreur commise.

iii) A partir de cette méthode élémentaire, construire une méthode de quadrature pour approcher $\int_a^b f(x)dx$ à partir de toute subdivision régulière $a = x_0 < x_1, ..., < x_n = b$ et donner une majoration de l'erreur commise en fonction de a, b, n et de $||f^{(4)}||_\infty$.

Exercice 2.

i) Soit $\alpha_i, i = 1 \dots 4$ quatre constantes réelles. Montrer qu'il existe un seul polynôme $p \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant les égalités :

$$p(0) = \alpha_1, \quad p'(0) = \alpha_2, \quad p(1) = \alpha_3, \quad p'(1) = \alpha_4. \tag{1}$$

ii) Calculer les quatre polynômes $p_i \in \mathbb{R}_3[X], i = 1 \dots 4$ vérifiant les relations (1), avec respectivement :

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)_i = (1, 0, 0, 0), \quad (0, 1, 0, 0), \quad (0, 0, 1, 0), \quad (0, 0, 0, 1). \tag{2}$$

Montrer que le polynôme de la question 1 .s'écrit comme une combinaison linéaire de p_i :

$$p(x) = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i\, p_i(x). \tag{3}$$

iii) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^4([0,1])$ et soit p_f le polynôme de la question 1. avec :

$$\alpha_1 = f(0), \quad \alpha_2 = f'(0), \quad \alpha_3 = f(1), \quad \alpha_4 = f'(1). \tag{4}$$

Montrer que pour chaque point $x \in]0,1[$, il existe un point $\xi_x \in]0,1[$ où on a l'égalité :

$$f(x) - p_f(x) = \frac{\pi(x)}{4!} f^{(4)}(\xi_x), \quad \text{avec} \quad \pi(x) = x^2(x-1)^2. \tag{5}$$

iv) On approxime l'intégrale d'une fonction f à l'aide de la formule de quadrature

$$\int_0^1 f(x)dx \sim \int_0^1 p_f(x)dx. \tag{6}$$

Montrer que cette formule est exacte pour les polynômes de $\mathbb{R}_3[X]$. Calculer les poids $w_i = \displaystyle\int_0^1 p_i(x)dx$, $i = 1, \ldots, 4$ et en déduire une forme explicite de la formule de quadrature.

Exercice 3.

Pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction f_t^n pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f_t^n(x) = ((x-t)_+)^n = (max(x-t, 0))^n$$

i) Représenter graphiquement les fonction f_{-1}^1, f_0^2 et f_1^1.

ii) Pour toute fonction réellle f, on note $E(f)$ l'erreur de quadrature pour la méthode élémentaire des trapèzes sur $[-1,1]$:

$$E(f) = \int_{-1}^1 f(x)dx - (f(-1) + f(1))$$

On note N l'ordre de cette méthode. Rappeler pourquoi $N = 1$.

iii) Calculer explicitement la fonction K définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par :

$$K(t) = E(f_t^N)$$

avec $N = 1$ (ordre de la méthode des trapèzes).
On distinguera les cas $t \in]-1,1[$ et $t \notin]-1,1[$.

iv) Reprendre le calcul précédent en remplaçant la méthode des trapèzes par la méthode de Simpson élémentaire sur $[-1,1]$ (on veillera à calculer la nouvelle valeur de N).

Exercice 4.

On souhaite approcher l'intégrale :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

en utilisant le moins de points possibles dans la formule de quadrature.

i) Quel choix de points proposez vous si on ne veut utiliser que deux points et que donne dans ce cas la valeur approchée de I ? On justifiera la réponse.

ii) Avec les points $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, quel choix de poids proposez vous ? Que donne alors la valeur approchée de I ?

iii) Proposer une stratégie efficace d'évaluation de I en utilisant N points et quel serait l'ordre de grandeur de l'erreur commise ?

Exercice 5. Autour de la méthode de Simpson

i) Soit $a > 0$ et $g \in C^5(]-a, a[, \mathbb{R})$, impaire. Montrer que si $|x| < a$, il existe un réel ξ entre 0 et x tel que

$$g(x) = \frac{x}{3}(g'(x) + 2g'(0)) - \frac{x^5}{180} g^{(5)}(\xi)$$

(Indication : considérer la fonction auxiliaire $h(t) = g(t) - \frac{t}{3}(g'(t) + 2g'(0)) + \frac{\alpha}{180} t^5$ avec α tel que $h(x) = 0$).

ii) Soit $f \in C^5([a, b], \mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\xi \in]a, b[$ tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{6}\left[f'(a) + f'(b) + 4f'(\frac{a+b}{2})\right] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(5)}(\xi).$$

En déduire une estimation de l'erreur commise par la méthode de Simpson appliquée à une fonction $g \in C^4([a, b], \mathbb{R})$.

Exercice 6. Erreur de l'intégration numérique de Gauss-Legendre

Soit $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^{2n+2}$.

On pose $I(f) = \int_{-1}^{1} f(t)\, dt$ et $J(f) = \int_{-1}^{1} P_f(t)\, dt$ où P_f désigne le polynôme d'interpolation de f aux $n+1$ points de Legendre (racines du n-ème polynôme de Legendre).

On note $M = \sup_{t \in [-1,1]} \left|f^{(2n+2)}(t)\right|$.

i) Soit T_f la partie régulière du développement de Taylor de f à l'ordre $2n + 1$ en 0. En utilisant une formule de Taylor-Lagrange, montrer que

$$|I(f) - I(T_f)| \le \frac{2M}{(2n+3)!}. \tag{7}$$

ii) Démontrer de même que

$$|J(f) - J(T_f)| \le \frac{2M}{(2n+2)!}. \tag{8}$$

iii) En déduire une majoration de $|I(f) - J(f)|$.

iv) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 1$ (formule à 2 points d'ordre 3).

v) Déterminer la formule de Gauss-Legendre dans le cas $n = 2$ (formule à 3 points d'ordre 5).