

MA650 : session 2

Exercice 1.

Donner la condition d'existence (et l'expression) de la factorisation LU d'une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Exercice 2.

Soit A une matrice symétrique définie positive de taille n . On considère la méthode itérative définie par

$$M = \frac{D}{2} - E \quad \text{et} \quad N = -\frac{D}{2} + F$$

Montrer que $\det(M^{-1}N) = (-1)^n$. En déduire que cette méthode est bien définie mais ne converge pas.

Exercice 3.

Montrer que le polynôme d'interpolation d'une fonction impaire f relativement aux points $\{-2, -1, 1, 2\}$ est impair.

Exercice 4.

Déterminer la meilleure approximation polynomiale de degré ≤ 2 au sens de la norme quadratique sur $[0, \pi]$ de $f(x) = \sin(x)$.

Exercice 5.

Déterminer une méthode de quadrature à 2 points, d'ordre 3 pour le poids $\omega(x) = e^{-x}$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 6.

Soit le problème de Cauchy $y' = f(t, y), y(0) = y_0$, avec $f : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ globalement Lipschitzienne par rapport à y , uniformément en t . Etudier la consistance, la stabilité, la convergence et l'ordre de la méthode suivante :

$$y_{n+1} = y_n + hf\left(t_n + \frac{h}{3}, y_n + \frac{h}{3}f(t_n, y_n)\right), \quad \text{où} \quad t_n = nh, h = T/N.$$