Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ième}}$ Année - Année 2019-2020
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

Devoir 1 : à rendre pour le lundi 20 avril

Soit $f \in C^1([0,1]$. On considère la formule de quadrature élémentaire :

$$\int_0^1 f(x)\,dx \simeq f(0) + \frac{1}{6}f'(0) + \frac{1}{3}f'(\frac{1}{2})$$

i) Montrer que cette méthode est d'ordre 3.

ii) On définit le noyau de Peano associé à la méthode précédente comme la fonction K définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ par

$$K(t) = E(x \to max((x-t)^3, 0))$$

où $E(f)$ désigne l'erreur de la méthode pour une fonction f quelconque :

$$E(f) = \int_0^1 f(x)dx - \left(f(0) + \frac{1}{6}f'(0) + \frac{1}{3}f'(\frac{1}{2})\right)$$

Calculer la fonction K. Montrer en particulier qu'elle est positive.

iii) On admet que l'erreur $E(f)$ de la méthode précédente est majorée ainsi :

$$|E(f)| \leq \frac{1}{720}||f^{(4)}||_\infty$$

pour toute fonction $f \in C^4([0,1], \mathbb{R})$.
A partir de cette méthode élémentaire, construire une méthode de quadrature pour approcher l'intégrale d'une fonction $f \in C([a,b], \mathbb{R})$ à partir de toute subdivision du type $a = x_0 < x_1 ... < x_n = b$ d'un intervalle $[a,b]$ et donner une majoration de l'erreur commise si f est C^4 sur $[a,b]$ en fonction de a, b, n et $.||f^{(4)}||_\infty$.