Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ième}}$ Année - Année 2019-2020
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

Devoir 2 : à rendre pour le lundi 4 mai

Exercice 1. On considère le schéma numérique à un pas suivant ;

$$y_{n+1} = y_n + \frac{\Delta T}{3}\left(f(t_n, y_n) + 2f(t_n + \frac{3}{4}\Delta T, y_n + \frac{3}{4}\Delta T f(t_n, y_n))\right)$$

pour approcher la solution exacte de l'équation différentielle :

$$\forall t \in [0, T], \quad y'(t) = f(t, y(t))$$

où $f \in C([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ et est globalement Lipschizienne par rapport à sa deuxième variable.

i) Montrer que le schéma précédent est consistant, stable et convergent.

ii) On suppose que $f \in C^2([0,T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$. Montrer que le schéma est d'ordre 2.

iii) En prenant $f(t, y) \equiv f(y)$, montrer que le schéma n'est pas d'ordre 3.

Exercice 2.

Montrer que la méthode de Runge Kutta suivante (vue en cours) :

$$\begin{cases} y_0 \in \mathbb{R} \text{ est donné,} \\ k_{n,1} = f(x_n, y_n) \\ k_{n,2} = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n,1}) \\ k_{n,3} = f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_{n,2}) \\ k_{n,4} = f(x_n + h, y_n + hk_{n,3}) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{h}{6}\left(k_{n,1} + 2k_{n,2} + 2k_{n,3} + k_{n,4}\right), \end{cases}$$

est bien d'ordre 4.