TD n°6 : Méthodes de quadrature : correction

Exercice 1.

i) En écrivant l'égalité de la formule pour les fonctions $f(u) = 1, u, u^2$ et u^3, on trouve le système à résoudre :

$$\begin{cases} 2 = \alpha(\beta + 2) \\ 0 = \alpha(\beta u_0 + u_2) \\ \dfrac{2}{3} = \alpha(\beta u_0^2 + u_2^2) \\ 0 = \alpha(\beta u_0^3 + u_2^3) \end{cases}$$

Forcément, $\alpha \neq 0$, ce qui implique $\beta u_0 = -u_2$ et $\beta u_0^3 = -u_2^3$, soit $-u_2 u_0^2 = -u_2^3$. On ne peut avoir $u_2 = 0$ car sinon, $\beta = 0$ ou $u_0 = 0$ et dans tous les cas ceci est impossible avec la 3ème relation. On a donc $u_0^2 = u_2^2$. De même, si $u_2 = u_0$, ceci est impossible par exemple en utilisant la 2eme relation. Au final, $u_2 = -u_0$ et alors $\beta = 1$ (2eme relation) puis $\alpha = \frac{2}{3}$ (1ere relation). La troisième relation donne alors $2u_0^2 = 1$ soit $u_0 = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

ii) On effectue le changement de variables $u \mapsto t = a_0 + \frac{h}{2} + u\frac{h}{2}$ qui transforme l'intervalle $[-1, 1]$ en $[a_0, a_0 + h]$ et on trouve la formule de quadrature :

$$\int_{a_0}^{a_0+h} f(t)dt \equiv \frac{h}{3}(f(a_0 + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{2}}) + f(a_0 + \frac{h}{2}) + f(a_0 + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{2}}))$$

L'erreur commise devient alors

$$|E(f)| \leq (\frac{h}{2})\frac{1}{360}||f^{(4)}||_\infty(\frac{h}{2})^4 = \frac{h^5}{11520}||f^{(4)}||_\infty$$

iii) En écrivant la relation de Chasles puis en approchant chaque intégrale par la formule ci-dessus, on trouve

$$\int_a^b f(x)dx \equiv \sum_{i=0}^{n-1} \frac{h}{3}\left(f(x_i + \frac{h}{2} - \frac{h}{2\sqrt{2}}) + f(x_i + \frac{h}{2}) + f(x_i + \frac{h}{2} + \frac{h}{2\sqrt{2}}))\right)$$

avec

$$h = \frac{b-a}{n}$$

et l'erreur associée est majorée par :

$$|E(f)| \leq n\frac{h^5}{11520}||f^{(4)}||_\infty = \frac{(b-a)^5}{11520\, n^4}||f^{(4)}||_\infty$$

Exercice 2.

i) Si $p \in \mathbb{R}_3[X]$, les équations (1) forment un système linéaire de 4 équations ù 4 inconnues (les coefficients du polynôme). Il suffit donc de montrer que le système homogène associé, obtenu pour $\alpha_i = 0$, n'admet que la solution nulle.

En effet, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$ implique que $(x = 0)$ et $(x = 1)$ sont racines doubles et p s'écrit sous la forme :

$$p(x) = q(x)\, x^2(x-1)^2.$$

Comme $p \in \mathbb{R}_3[X]$, nécessairement $q(x) = 0$.

ii) Si $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$, on obtient facilement que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_0 & = & \alpha_1 \\ a_1 & = & \alpha_2 \\ a_2 & = & -\alpha_4 + 3\alpha_3 - 2\alpha_2 - 3\alpha_1 \\ a_3 & = & \alpha_4 - 2\alpha_3 + \alpha_2 + 2\alpha_1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} p_1(x) & = & 2x^3 - 3x^2 + 1 \\ p_2(x) & = & x^3 - 2x^2 + x \\ p_3(x) & = & -2x^3 + 3x^2 \\ p_4(x) & = & x^3 - x^2 \end{array}\right. .$$

Par unicité de la solution du système (1), il suffit de montrer que $\sum_{i=1}^4 \alpha_i p_i$ vérifie le système pour pouvoir conclure que $p = \sum_{i=1}^4 \alpha_i p_i$. Notons $q = \sum_{i=1}^4 \alpha_i p_i$. On obtient facilement, à partir des définitions des polynômes p_i, que $q(0) = \alpha_1$, $q'(0) = \alpha_2$, $q(1) = \alpha_3$ et $q'(1) = \alpha_4$ donc q vérifie (1), d'où la conclusion.

iii) Considérons la fonction :

$$g(t) = f(t) - p_f(t) - \frac{f(x) - p_f(x)}{\pi(x)}\,\pi(t) \Longrightarrow g'(t) = f'(t) - p_f'(t) - \frac{f(x) - p_f(x)}{\pi(x)}\, 2t(t-1)(2t-1).$$

Comme $g(0) = g(x) = g(1) = 0$, il existe (th. de Rolle) au moins $\xi_1 \in]0, x[$ et $\xi_2 \in]x, 1[$ tels que $g'(\xi_1) = g'(\xi_2)$. De plus, il est évident que $g'(0) = g'(1) = 0$: donc, g' s'annule en 4 points et, par conséquent, il existe $\xi_x \in]0, 1[$ tel que $d^3/dx^3(g')(\xi_x) = g^{(4)}(\xi_x) = 0$.

En dérivant dans l'expression de g, nous obtenons ($p_f \in \mathbb{R}_3[X]$ donc $p_f^{(4)} = 0$) :

$$f^{(4)}(\xi_x) - \frac{f(x) - p_f(x)}{\pi(x)}\, 4! = 0,$$

d'où le résultat demandé.

iv) Si $f(x) = p(x) \in \mathbb{R}_3[X]$, l'unicité démontrée au a) montre que $p_f(x) = p(x) = f(x)$, donc la formule de quadrature est exacte pour $p(x) \in \mathbb{R}_3[X]$.

Un calcul élémentaire donne les valeurs des poids :

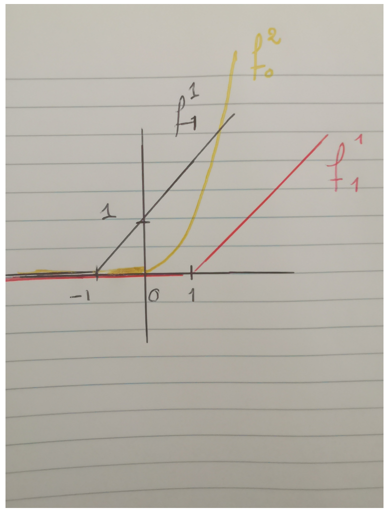
$$w_1 = 1/2, \quad w_2 = 1/12, \quad w_3 = 1/2, \quad w_4 = -1/12.$$

Par conséquent, la formule de quadrature s'écrit sous la forme :

$$\int_0^1 f(x)dx \sim \frac{1}{2}\,(f(0) + f(1)) + \frac{1}{12}\,(f'(0) - f'(1))$$

Exercice 3.

i) On a la figure suivante



ii) La méthode des trapèzes est d'ordre $N = 1$ car elle est exacte pour tout polynôme de degré inférieur ou égal à 1.

iii) Lorsque $t \notin]-1, 1[$, on a $K(t) = 0$ car dans ce cas la fonction f_t^1 est une fonction affine sur $[-1, 1]$ et la méthode des trapèzes est exacte dans ce cas

Lorsque $t \in]-1, 1[$, on trouve

$$K(t) = \int_t^1 (u - t)du - (1 - t) = \frac{1}{2}(1 - t)^2 - 1 + t = \frac{1}{2}(-1 + t^2)$$

iv) On prend ici. $N = 3$. De même, Lorsque $t \notin]-1, 1[$, on a $K(t) = 0$ car la méthode de Simpson est d'ordre 3. Sinon, on a deux cas possibles : si $t \in]-1, 0]$, on a

$$K(t) = \frac{(1 - t)^4}{4} - (\frac{4}{3}(-t)^3 + \frac{1}{3}(1 - t)^3)$$

et si $t \in]0, 1[$, on a

$$K(t) = \frac{(1 - t)^4}{4} - \frac{1}{3}(1 - t)^3$$