

TD n°6 : Méthodes de quadrature (corrigé)

Exercice 4

- i) Le meilleur choix possible, c'est à dire pour avoir une formule d'ordre le plus élevé, est de prendre les points $\{\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}}, \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}}\}$ qui permettent d'avoir une approximation d'ordre 3. On peut aussi prendre les points 0 et 1 et utiliser la méthode des trapèzes mais la méthode est d'ordre 1 seulement. Dans le premier cas, on trouve

$$I \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{3}})^2} + \frac{1}{1 + (\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}})^2} \right) = \frac{48}{61} \simeq 0.78688$$

Dans le second cas, on trouve

$$I \simeq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 + 0^2} + \frac{1}{1 + (1)^2} \right) = \frac{3}{4}$$

- ii) Avec les points $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$, on utilise la formule de Simpson et donc cette fois-ci :

$$I \simeq \frac{1}{6} \frac{1}{1 + 0^2} + \frac{4}{6} \frac{1}{1 + (\frac{1}{2})^2} + \frac{1}{6} \frac{1}{1 + (1)^2} = \frac{47}{60} \simeq 0.78333$$

Remarque : la valeur exacte de I est de $\frac{\pi}{4} \simeq 0.78539$

- iii) En utilisant $N + 1$ points $x_0 = 1 < x_1 = h = \frac{1}{N} < \dots < x_N = 1$, on utilise une méthode composée avec la méthode de Gauss-Legendre à 2 points sur chaque intervalle élémentaire ou la méthode de Simpson. Dans les deux cas, cela nécessite d'utiliser $2N$ points (ou $2N + 1$) pour un ordre de grandeur de l'erreur en $O(\frac{1}{N^4})$ (ordre 3 dans les deux cas). On pourrait aussi utiliser une méthode à N points qui soit d'ordre $2N - 1$. Cependant, si N est grand, cela nécessite un calcul de racines de polynômes trop complexe.

Exercice 5

- i) On utilise la fonction h de l'énoncé qu'on dérive quatre fois :

$$\begin{cases} h'(t) = \frac{2}{3}(g'(t) - g'(0)) - \frac{t}{3}g''(t) + \alpha \frac{t^4}{36} \\ h''(t) = \frac{1}{3}(g''(t) - tg^{(3)}(t)) + \alpha \frac{t^3}{9} \\ h^{(3)}(t) = -\frac{t}{3}g^{(4)}(t) + \alpha \frac{t^2}{3} \\ h^{(4)}(t) = -\frac{t}{3}g^{(5)}(t) - \frac{1}{3}g^{(4)}(t) + 2\alpha \frac{t}{3} \end{cases}$$

On remarque que $h(0) = h''(0) = 0$ car h est impaire. puis avec les expressions des dérivées, $h'(0) = h^{(3)}(0) = 0$. En appliquant plusieurs fois le théorème de Rolle, on en déduit qu'il existe $\xi_1 \in]0, a[$ tel que $h^{(4)}(\xi_1) = 0$.

Ceci signifie

$$-\frac{\xi_1}{3}g^{(5)}(\xi_1) - \frac{1}{3}g^{(4)}(\xi_1) + 2\alpha\frac{\xi_1}{3} = 0$$

De plus, comme $g^{(4)}$ est une fonction impaire, en appliquant le théorème des accroissements finis entre 0 et ξ_1 , on a

$$g^{(4)}(\xi_1) - 0 = \xi_1 g^{(5)}(\xi_2)$$

avec $\xi_2 \in]0, \xi_1[$. En substituant cette relation dans la relation précédente et en divisant par ξ_1 , on trouve que

$$\alpha = \frac{g^{(5)}(\xi_1) + g^{(5)}(\xi_2)}{2}$$

Or, $g^{(5)}$ est une fonction continue et par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\xi \in]\xi_1, \xi_2[$ tel que

$$\alpha = g^{(5)}(\xi)$$

En écrivant $h(x) = 0$, on obtient le résultat demandé.

- ii) On commence par écrire une relation pour une fonction $f \in C^5([-a, a], \mathbb{R})$ quelconque : on note $g(x) = f(x) - f(-x)$ et on écrit le résultat précédent pour g : il existe un réel ξ entre 0 et a tel que

$$f(a) - f(-a) = \frac{a}{3}(f'(-a) + 4f'(0) + f'(a)) - \frac{a^5}{180}(f^{(5)}(-\xi) + f^{(5)}(\xi))$$

soit

$$f(a) - f(-a) = \frac{a}{3}(f'(-a) + 4f'(0) + f'(a)) - \frac{a^5}{90}f^{(5)}(\xi')$$

On décale ensuite cette relation pour $f \in C^5([a, b], \mathbb{R})$: il existe alors un réel ξ entre a et b tel que

$$f(b) - f(a) = \frac{(b-a)}{6}(f'(a) + 4f'(\frac{a+b}{2}) + f'(b)) - \frac{(b-a)^5}{2^5 * 90}f^{(5)}(\xi)$$

Enfin, soit $h \in C^4([a, b], \mathbb{R})$, on considère la fonction $f(x) = \int_a^x h(t)dt$ et on applique le résultat précédent : il existe un réel ξ entre a et b tel que

$$\int_a^b h(t)dt = \frac{(b-a)}{6}(h(a) + 4h(\frac{a+b}{2}) + h(b)) - \frac{(b-a)^5}{2880}h^{(4)}(\xi)$$

La méthode de Simpson, appliquée sur $n+1$ points équirépartis sur $[a, b]$ à une fonction $h \in C^4([a, b], \mathbb{R})$ a donc une erreur majorée par

$$|E(h)| \leq \frac{(b-a)^5}{2880n^4} \|h^{(4)}\|_{\infty}$$

Exercice 6

- i) La formule de Taylor Lagrange donne la relation suivante : pour tout $x \in]-1, 1[$, il existe $\xi_x \in]0, x[$ tel que

$$f(x) = T_f(x) + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x)$$

où T_f est un polynôme de degré au plus $2n+1$.

On intègre cette relation entre -1 et 1 et on trouve :

$$I(f) = I(T_f) + \int_{-1}^1 \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x) dx$$

Une majoration simple donne alors

$$|I(f) - I(T_f)| \leq \frac{2M}{(2n+3)!}.$$

avec $M = \sup_{t \in [-1, 1]} |f^{(2n+2)}(t)|$.

- ii) On note P_g le polynôme d'interpolation d'une fonction g aux points de Legendre. On a donc

$$P_f = P_{T_f} + P_{R_f} \quad (*)$$

où

$$R_f(x) = \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(\xi_x)$$

De plus, on a

$$P_{R_f}(x) = \sum_{i=0}^n l_i(x) R_f(x_i)$$

En intégrant la relation (*) entre -1 et 1 , il vient

$$J(f) = J(T_f) + \int_{-1}^1 \left(\sum_{i=0}^n l_i(x) R_f(x_i) \right) dx$$

puis

$$|J(f) - J(T_f)| = \left| \sum_{i=0}^n \left(\int_{-1}^1 l_i(x) dx \right) R_f(x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^n \lambda_i |R_f(x_i)|$$

En effet, comme il s'agit des points de Legendre, on sait que les poids dans la méthode de quadrature de Gauss Legendre $\lambda_i = \int_{-1}^1 l_i(x) dx$ sont tous positifs. En majorant R_f avec son expression, on obtient bien

$$|J(f) - J(T_f)| \leq 2 \frac{M}{(2n+2)!}$$

- iii) On a $I(T_f) = J(T_f)$ puisque la méthode de Gauss Legendre est d'ordre $2n+1$. En effet, pour une fonction g quelconque, $J(g) = \sum_{i=0}^n \int_{-1}^1 l_i(x) g(x_i) dx = \sum_{i=0}^n \lambda_i g(x_i)$ est bien l'approximation de $I(g)$ par la méthode de Gauss-Legendre. On a donc

$$|I(f) - J(f)| \leq 2 \frac{M}{(2n+2)!} \left(1 + \frac{1}{2n+3} \right)$$

On retrouve bien en particulier la convergence très rapide de la méthode de Gauss-Legendre.

- iv) Il faut tout d'abord trouver le polynôme orthogonal de Legendre de degré 2 puis les deux racines de ce polynôme. Le plus simple est d'écrire $P(x) = x^2 + bx + c$ et de dire que P est orthogonal à $x \mapsto 1$ et $x \mapsto x$. On trouve facilement $b = 0$ et $c = -\frac{1}{3}$. Les points sont donc $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{3}}$. En imposant que la méthode soit exacte pour $x \mapsto x$ on trouve que les poids sont forcément égaux et valent donc 1.
- v) De même, on calcule le polynôme de Legendre de degré 3 et on trouve facilement que $P(x) = x^3 - \frac{3}{5}x$. Les points sont donc $-\sqrt{\frac{3}{5}}$, 0 et $\sqrt{\frac{3}{5}}$. En notant α , β et γ les poids associés, on trouve que $\alpha = \gamma$ en écrivant l'égalité pour la fonction $x \mapsto x$, puis $\alpha = \gamma = \frac{5}{9}$ pour la fonction $x \mapsto x^2$ et enfin $\beta = \frac{8}{9}$. Au final, la seule méthode à 3 points d'ordre 5 est :

$$\int_{-1}^1 f(x)dx \simeq \frac{5}{9}f(-\sqrt{\frac{3}{5}}) + \frac{8}{9}f(0) + \frac{5}{9}f(\sqrt{\frac{3}{5}})$$