

TD n°7 : résolution des EDO par la méthode d'Euler, corrigé

Exercice 1.

- i) On obtient à partir de la seconde équation $y(t) = y_0 e^{2t}$. En injectant cette solution dans la première équation, on obtient $x' = 2x - 2ty_0 e^{2t}$. La solution de l'équation homogène associée est $x(t) = K e^{2t}$ et la méthode de variation de la constante conduit à l'équation $K' e^{2t} = -2ty_0 e^{2t}$, d'où $K' = -2ty_0$ c'est-à-dire $K = -y_0 t^2 + C$. Finalement, la solution de la première équation est $x(t) = -y_0 t^2 e^{2t} + C_1 e^{2t}$ et la condition initiale donne $C_1 = x_0$. La courbe intégrale cherchée est donc la courbe $(x(t), y(t))$ avec

$$\begin{cases} x(t) &= (x_0 - y_0 t^2) e^{2t} \\ y(t) &= y_0 e^{2t} \end{cases}$$

- ii) (a) La méthode d'Euler s'écrit ici $(x_{n+1}, y_{n+1}) = (x_n, y_n) + 2h(x_n - nhy_n, y_n)$. On a donc en particulier

$$y_{n+1} = (1 + 2h)y_n \implies y_n = (1 + 2h)^n y_0.$$

Il vient alors la relation

$$x_{n+1} = (1 + 2h)x_n - 2nh^2(1 + 2h)^n y_0 \iff \frac{x_{n+1}}{(1 + 2h)^{n+1}} = \frac{x_n}{(1 + 2h)^n} - \frac{2nh^2}{1 + 2h} y_0.$$

- (b) Posons $z_n = x_n / (1 + 2h)^n$. On a

$$z_{n+1} = z_n - \frac{2y_0 h^2}{1 + 2h} n \implies z_n = z_0 - \frac{2y_0 h^2}{1 + 2h} \frac{n(n-1)}{2}$$

et enfin, pour tout $n \geq 1$,

$$x_n = (1 + 2h)^n x_0 - n(n-1)h^2(1 + 2h)^{n-1} y_0.$$

- (c) Pour y (et en prenant $x_0 = y_0 = 1$), on a

$$y(nh) - y_n = e^{2nh} - (1 + 2h)^n = e^{2nh}(1 - e^{n \ln(1+2h) - 2nh}) = e^{2nh}(1 - e^{-2nh^2 + no(h^2)})$$

et on a bien

$$\lim_{h \rightarrow 0} \max(\{|y_n - y(t_n)|, 0 \leq n \leq N\})$$

Pour x , le terme en e^{2t} se traite comme pour y tandis que pour l'autre terme, on a

$$(nh)^2 e^{2nh} - n(n-1)h^2(1 + 2h)^{n-1} = (nh)^2 e^{2nh} \left(1 - \frac{e^{-2nh^2 + no(h^2)}}{(1 + 2h)}\right) + nh^2(1 + 2h)^{n-1}$$

Chacun de ces termes converge uniformément en $n \in \{0, \dots, N\}$ vers 0 quand h tend vers 0 (le deuxième terme se majore en valeur absolue par $hT e^{2T}$).

Exercice 2.

- i) On choisit de prendre 101 points sur $[0, 1]$, soit $\Delta T = \frac{1}{100}$, et la suite d'approximations vérifie :

$$y_{n+1} = y_n + \Delta T(-150y_n + 50)$$

soit $y_{n+1} = -\frac{1}{2}y_n + \frac{1}{2}$ dont la solution vérifie (suite de type arithmetico-géométrique) :

$$y_n = (y_0 - \frac{1}{3})(-\frac{1}{2})^n + \frac{1}{3}$$

On trouve alors

$$y_{100} = (\frac{1}{30})(-\frac{1}{2})^{100} + \frac{1}{3} \simeq \frac{1}{3}$$

- ii) Par la méthode de variation de la constante, on trouve que $y(t) = \frac{1}{3}$. L'approximation de $y(1)$ est donc très bonne. En fait, il est même possible de prendre un nombre de points inférieur, il suffit simplement que $1 - 150\Delta T > -1$ soit $\Delta T < \frac{1}{75}$ ou $N > 75$. A partir de 76 points, l'approximation sera très bonne (et très mauvaise avant).

Exercice 3.

- i) On raisonne par récurrence sur $n \in \{0, \dots, N\}$ pour justifier l'existence de y_n . Pour l'hérédité, soit $n \in \{0, \dots, N-1\}$ fixé, on considère l'application Φ de $\mathbb{R}^m$ dans $\mathbb{R}^m$ telle que pour tout $y \in \mathbb{R}^m$,

$$\Phi(y) = y_n + \Delta T f(t_0 + (n+1)\Delta T, y)$$

Cette application est strictement contractante de rapport $\Delta T L < 1$. Par le théorème du point fixe de Picart, il existe un unique y tel que $\Phi(y) = y$. On le note y_{n+1} .

- ii) On écrit les deux relations suivantes ;

$$\begin{cases} y_{n+1} = y_n + \Delta T f(t_0 + (n+1)\Delta T, y_{n+1}) \\ y(t_{n+1}) = y(t_n) + \Delta T f(t_0 + (n+1)\Delta T, y(t_{n+1})) - \epsilon_n \end{cases}$$

qu'on soustrait ensuite. En prenant la norme et en utilisant l'inégalité triangulaire puis le caractère Lipschitzien de f , il vient :

$$\|e_{n+1}\| \leq \|e_n\| + \Delta T L \|e_{n+1}\| + \|\epsilon_n\|$$

Le résultat demandé s'en déduit aisément.

- iii) Il s'agit en fait exactement du Lemme 2 du cours (présenté lors de la démonstration de convergence de la méthode d'Euler). Cela peut être redémontré directement par récurrence sur n . L'initialisation est immédiate. Pour l'hérédité, on utilise le fait que

$$(1 + \Delta T L_1) e^{L_1 n \Delta T} \leq e^{L_1 (n+1) \Delta T}$$

(car $1 + x \leq e^x$). pour conclure facilement ensuite.

Ensuite, comme y est C^2 , on peut écrire par le théorème de Taylor Lagrange que

$$y(t_n) = y(t_{n+1}) - \Delta T f(t_0 + (n+1)\Delta T, y(t_{n+1})) + \frac{(-\Delta T)^2}{2} y''(c_n)$$

et donc, comme $\|y''\|$ est majorée par M sur $[t_0, t_0 + T]$, on a $\|\epsilon_n\| \leq M(\Delta T)^2$, puis

$$\|e_n\| \leq C\|e_0\| + C(1 + LT)Mn(\Delta T)^2 \leq C\|e_0\| + C'(\Delta T)$$

car $n\Delta T \leq N\Delta T = T$. On a bien

$$\lim_{N \rightarrow +\infty, y_0 \rightarrow y(t_0)} (\max_{0 \leq n \leq N} \|e_n\|) = 0$$