Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - $3^{\text{ième}}$ Année - Année 2019-2020
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

TD n^{o}8 : Consistance, stabilité, convergence et ordre pour les méthodes à un pas

Exercice 1.

On calcule la fonction Φ associée à la méthode :

$$\forall (t,y,h) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times [0,T], \Phi(t,y,h) = \frac{1}{2} f(t,y) + \frac{1}{2} f(t+h, y+hf(t,y))$$

On obtient tout d'abord facilement que $\Phi(t,y,0) = f(t,y)$: la méthode est donc consistante. Ensuite, on majore

$$|\Phi(t,y_{,2},h) - \Phi(t,y_{,1},h)| \leq \frac{L}{2}|y_2 - y_1| + \frac{L}{2}|(y_2 + hf(t,y_2)) - (y_1 + hf(t,y_1))|$$

puis

$$|\Phi(t,y_{,2},h) - \Phi(t,y_{,1},h)| \leq \frac{L}{2}|y_2 - y_1| + \frac{L}{2}(1+TL)|y_2 - y_1|$$

et Φ est bien Lipschitzienne par rapport à sa deuxième variable : la méthode est donc stable. On en déduit que la méthode est convergente.

On peut aussi calculer son ordre (non demandé ici) :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,h) = \frac{1}{2}\partial_t f(t+h, y+hf(t,y)) + \frac{1}{2} f(t,y) \partial_y f(t+h, y+hf(t,y))$$

On évalue en $h = 0$, ce qui donne :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,0) = \frac{1}{2}\partial_t f(t,y) + \frac{1}{2} f(t,y)\partial_y f(t,y) = \frac{1}{2} f^{[1]}(t,y)$$

et la méthode est (au moins) d'ordre 2. En calculant une dérivée partielle supplémentaire, on pourrait montrer qu'elle est exactement d'ordre 2 (donc plus précise que la méthode d'Euler).

Exercice 2.

On procède comme dans l'exercice précédent en calculant la fonction Φ associée :

$$\forall (t,y,h) \in [0,T] \times \mathbb{R} \times [0,T], \Phi(t,y,h) = \ f(t+ah, y+ahf(t,y))$$

On a toujours $\Phi(t,y,0) = f(t,y)$: la méthode est donc consistante. De même, en procédant de manière analogue

$$|\Phi(t,y_{,2},h) - \Phi(t,y_{,1},h)| \leq (L + aT)|y_2 - y_1|$$

et la méthode est toujours stable. . Avec ces deux propriétés, elle est convergente. Pour calculer l'ordre :

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,h) = a\partial_t f(t+ah, y+ahf(t,y)) + af(t,y)\partial_y f(t+ah, y+ahf(t,y))$$

puis en évaluant en $h = 0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,0) = a\partial_t f(t,y) + af(t,y)\partial_y f(t,y) = af^{[1]}(t,y)$$

il faut donc que $a = \frac{1}{2}$ pour que la méthode soit d'ordre 2. Pour cette valeur de a, on calcule

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 h}(t,y,h) = a^2 \partial_t \partial_t f(t^*,y^*) + a^2 f(t,y)\partial_y \partial_t f(t^*,y^*) + a^2 f(t,y)\partial_t \partial_y f(t^*,y^*) + a^2 f^2(t,y)\partial_y \partial_y f(t^*,y^*)$$

puis on évalue en $h = 0$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial^2 h}(t,y,h) = a^2 \partial_t \partial_t f(t,y) + a^2 f(t,y)\partial_y \partial_t f(t,y) + a^2 f(t,y)\partial_t \partial_y f(t,y) + a^2 f^2(t,y)\partial_y \partial_y f(t,y)$$

Ceci ne peut être égal à

$$\frac{1}{3} f^{[2]}(t,y) = \frac{1}{3}(\partial_t f^{[1]}(t,y) + f(t,y)\partial_y f^{[1]}(t,y))$$

au vu par exemple du coefficient devant $\partial_t \partial_t f(t,y)$ égal à $\frac{1}{4}$ et $\frac{1}{3}$ respectivement. La méthode n'est pas d'ordre 3. Il s'agit d'une nouvelle méthode d'ordre 2 appelée méthode du point milieu.

Exercice 3.

On procède comme dans les deux exercices précédents en étudiant la fonction Φ donnée dans l'énoncé :

$$\phi(x,y,h) = \alpha f(x,y) + \beta f(x + \frac{h}{2}, y + \frac{h}{2} f(x,y)) + \gamma f(x+h, y + hf(x,y))$$

(attention x joue ici le rôle de t).

La méthode est consistante si et seulement si

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

On montre ensuite que la méthode est toujours stable avec une constante de Lipschitz pour Φ égale à

$$\Lambda = (\alpha + \beta + \gamma)L + \beta a \frac{L^2}{2} + \gamma L^2 a$$

(car $h \leq a$ longueur de l'intervalle). La méthode est donc convergente si $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Elle est forcément d'ordre 1 si f est C^1 (car alors Φ l'est). Pour qu'elle soit d'ordre (au moins) 2, on calcule

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(x,y,h) = \frac{\beta}{2}\partial_x f(x^*,y^*) + \frac{\beta}{2} f(x,y)\partial_y f(x^*,y^*) + \gamma \partial_x f(\tilde{x},\tilde{y}) + \gamma f(x,y)\partial_y f(\tilde{x},\tilde{y})$$

et on évalue en $h = 0$:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(x,y,0) = (\frac{\beta}{2} + \gamma)\partial_x f(x,y) + (\frac{\beta}{2} + \gamma) f(x,y)\partial_y f(x,y)$$

Il faut donc que

$$\frac{\beta}{2} + \gamma = \frac{1}{2}$$

pour que la méthode soit (au moins) d'ordre 2. Il y en a une infinité : par exemple $\alpha = \gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = 0$: c'est la méthode de l'exercice 1 (Heun) ou $\beta = 1$ et $\alpha = \gamma = 0$: c'est la méthode de l'exercice 2 (point milieu). En calculant les dérivées secondes et en procédant comme dans l'exercice 2, on s'aperçoit qu'il n'y a aucune méthode d'ordre 3.

Exercice 4.

i) On trouve facilement en procédant comme précédemment que F (l'équivalent ici de la fonction Φ) est Lipschitzienne de rapport

$$\Lambda = L + TaL_1 + T^2 bL_2 \beta TL$$

avec L_1 et L_2 les constantes de Lipschitz de $f^{[1]}$ et $f^{[2]}$.

ii) La méthode est d'ordre 1 (toujours) car $F(t,x,0) = f(t,x)$. De plus

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,0) = af^{[1]}(t,x)$$

(il y a d'autres termes pour $h > 0$ mais ces termes disparaissent lorsque $h = 0$ en raison du h ou du h^2 qui se trouve en facteur dans ces termes). Il faut donc que $a = \frac{1}{2}$ pour que la méthode soit d'ordre 2. De même

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(t,y,0) = bf^{[2]}(t,x)$$

(même remarque, les autres termes ont du h en facteur). Il faut donc que $b = \frac{1}{3}$ pour que la méthode soit d'ordre 3. Pour l'ordre 4, c'est un peu plus compliqué : il faut calculer l'expression générale de $\frac{\partial^3 \Phi}{\partial h^3}(t,y,h)$ et avant cela $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(t,y,h)$:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial h^2}(t,y,h) = bf^{[2]}(t+\alpha h, x+\beta h f(t,x)) + 2h(b\alpha\partial_t f^{[2]} + b\beta f(t,y)\partial_y f(t^*,y^*))$$

puis

$$\frac{\partial^3 \Phi}{\partial h^3}(t,y,0) = b\alpha\partial_t f^{[2]} + b\beta f\partial_y f^{[2]} + 2(b\alpha\partial_t f^{[2]} + b\beta f(t,y)\partial_y f^{[2]})$$

Il faut donc que $3b\alpha = 3b\beta = \frac{1}{4}$, soit $\alpha = \beta = \frac{1}{4}$ (sachant $b = \frac{1}{3}$).