Université de Versailles-Saint Quentin
Licence de Maths, Physique, Méca - 3ième Année - Année 2019-2020
Analyse Numérique
`http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA650.html`

*TD n°9 : Méthodes de Runge Kutta (correction)*

**Exercice 1.**

On reprend l'expression de la fonction $\Phi$ pour une méthode de Runge Kutta :

$$\Phi(t,y,h) = \sum_{j=1}^{q} b_j f(t + c_j h, y_j)$$

où la famille $(y_i)_{1\leq i\leq q}$ est définie pout tout $(t,y,h)$ par

$$y_i = y + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} f(t + c_j h, y_j), \quad 1 \leq i \leq q.$$

On calcule alors

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,h) = \sum_{j=1}^{q} b_j \left( c_j \partial_t f(t + c_j h, y_j) + \partial_y f(t + c_j h, y_j) \frac{\partial y_i}{\partial h} \right)$$

avec

$$\frac{\partial y_i}{\partial h} = \sum_{k=1}^{j-1} a_{j,k} f(t + c_k h, y_k) + h \sum_{k=1}^{j-1} a_{j,k} \left( c_k \partial_t f(t + c_k h, y_k) + \partial_y f(t + c_k h, y_k) \frac{\partial y_k}{\partial h} \right).$$

En particulier,

$$\frac{\partial y_i}{\partial h}(t,y,0) = \sum_{k=1}^{j-1} a_{j,k} f(t,y) = c_j f(t,y)$$

et

$$\frac{\partial \Phi}{\partial h}(t,y,0) = \sum_{j=1}^{q} b_j c_j \left( \partial_t f(t,y) + \partial_y f(t,y) f(t,y) \right) = (\sum_{j=1}^{q} b_j c_j) f^{[1]}(t,y).$$

On obtient donc bien la condition nécessaire et suffisante

$$\sum_{j=1}^{q} b_j c_j = \frac{1}{2}$$

pour qu'une méthode de Runge-Kutta soit d'ordre 2.

**Exercice 2.** On considère la méthode de Runge Kutta, définie par le tableau :

$$\begin{array}{cc|ccc}
 & 0 & 0 & & \\
(M2) & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & & \\
(M3) & \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} & \\
- & - & - & - & - \\
(M) & 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{8} & \frac{3}{8}
\end{array}$$

1. (M2) s'écrit
$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx \simeq \frac{2}{3}f(0)$$
Cette méthode (rectangles à gauche) est d'ordre 0.
(M3) s'écrit
$$\int_0^{\frac{2}{3}} f(x)dx \simeq \frac{2}{3}f(\frac{2}{3})$$
Cette méthode (rectangles à droite) est d'ordre 0.
(M) s'écrit
$$\int_0^{1} f(x)dx \simeq \frac{1}{4}f(0) + \frac{3}{4}f(\frac{2}{3})$$
Cette méthode est d'ordre 2 : elle est exacte pour les constantes, pour $f(x) = x$ (car $\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$) et pour $f(x) = x^2$ ($\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$). Par contre, elle n'est pas exacte pour $f(x) = x^3$.
2. Pour passer de $y_n$ à $y_{n+1}$, on effectue les opérations suivantes :
$$\begin{cases} y_{n,1} = y_n \\ y_{n,2} = y_n + \dfrac{2}{3}\Delta T f(t_n, y_{n,1}) \\ y_{n,3} = y_n + \dfrac{2}{3}\Delta T f(t_n + \dfrac{2}{3}\Delta T, y_{n,2}) \\ y_{n+1} = y_n + \dfrac{1}{4}\Delta T f(t_n,, y_n) + \dfrac{3}{8}\Delta T f(t_n + \dfrac{2}{3}\Delta T, y_{n,2}) + \dfrac{3}{8}\Delta T f(t_n + \dfrac{2}{3}\Delta T, y_{n,3}) \end{cases}$$
3. La méthode est au moins d'ordre 2 car $0 * \frac{1}{4} + \frac{2}{3} * \frac{3}{8} + \frac{2}{3} * \frac{3}{8} = \frac{1}{2}$.

**Exercice 3.**

1. On écrit les conditions pour que la méthode de quadrature soit d'ordre 2 :
$$\begin{cases} a + b + c = 1 \\ \dfrac{b}{3} + \dfrac{c}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{b}{9} + \dfrac{c}{4} = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$
et on trouve facilement $(a, b, c) = (\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, 2)$.

2. (a) M2 s'écrit

$$\int_0^{\frac{1}{3}} f(x)dx \simeq \frac{1}{3}f(0)$$

Cette méthode (rectangles à gauche) est d'ordre 0. M3 s'écrit

$$\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx \simeq \frac{1}{2}f(\frac{1}{3})$$

Cette méthode est d'ordre 0.

(b) Pour passer de $y_n$ à $y_{n+1}$, on effectue les opérations suivantes :

$$\begin{cases} y_{n,1} = y_n \\ y_{n,2} = y_n + \frac{1}{3}\Delta T f(t_n, y_{n,1}) \\ y_{n,3} = y_n + \frac{1}{2}\Delta T f(t_n + \frac{1}{3}\Delta T, y_{n,2}) \\ y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\Delta T f(t_{n,}, y_n) + \frac{-3}{2}\Delta T f(t_n + \frac{1}{3}\Delta T, y_{n,2}) + 2\Delta T f(t_n + \frac{1}{2}\Delta T, y_{n,3}) \end{cases}$$

(c) (La méthode est (au moins) d'ordre 2 car

$$-\frac{3}{2}.\frac{1}{3} + 2.\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$