Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2017-2018

TP 3: Optimisation numérique unidimensionnelle avec SCILAB

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I = [a_0,\, b_0] \subset \mathbb{R}$. Notre objectif ici est de trouver le minimum de f numériquement. On propose plusieurs méthodes. On dira que f est unimodale sur I si: (a) f admet un minimum unique sur I, atteint en un point $t^\star \in I$, (b) f est strictement décroissante sur $[a_0, t^\star]$ et strictement croissante sur $[t^\star, b_0]$. Ainsi, si f est strictement convexe sur I et atteint son minimum en un point $t^\star \in \overset{\circ}{I}$, alors f est unimodale sur I.

1. Méthode de dichotomie sans dérivées

La première étape de la dichotomie sans dérivée consiste à considérer un intervalle plus petit $[a_0', b_0']$ tel que $a_1' = (1-\rho_1)a_0 + \rho_1 b_0$, et $b_1' = \rho_1 a_0 + (1-\rho_1)b_0$ où ρ_1 est un réel (arbitrairement choisi pour le moment) tel que $0 \leq \rho_1 < \frac{1}{2}$ (la longueur de l'intervalle $[a_1', b_1']$ est égale à $(1-2\rho_1)(b_0 - a_0)$. On a deux cas: (a) soit $f(a_1') < f(b_1')$ et donc $t^\star \in [a_0, b_1']$. On pose alors $[a_1, b_1] = [a_0, b_1']$, (b) Soit $f(a_1') \geq f(b_1')$ et donc $t^\star \in [a_1', b_0]$. On pose alors $[a_1, b_1] = [a_1', b_0]$.

Dans les deux cas, l'intervalle $[a_1, b_1]$ est de longueur $(1-\rho_1)(b_0 - a_0)$. On recommence ensuite le même processus en démarrant de l'intervalle $[a_1, b_1]$; on choisit un nouvel intervalle $[a_2', b_2'] \subset [a_1, b_1]$ tel que $a_2' = (1-\rho_2)a_1 + \rho_2 b_1$ et $b_2' = \rho_2 a_1 + (1-\rho_2)b_1$ et on continue de même. Au bout de N itérations, on obtient un intervalle réduit $[a_N, b_N]$ de taille $(1-\rho_1)...(1-\rho_N)(b_0 - a_0)$. Il reste à choisir les coefficients $\rho_1, ..., \rho_N$.
L'une des façons de les choisir repose sur le souhait de réduire le nombre d'évaluations de la fonction f (ces évaluations peuvent être très couteuses en temps de calcul). Ainsi, il convient de choisir dans la deuxième étape ci-dessus $b_2' = a_1'$ (quand $t^\star \in [a_0, b_1']$) ou $a_2' = b_1'$ (quand $t^\star \in [a_1', b_0]$). Un petit calcul montre que ce choix n'est possible que si

$$\rho_2 = 1 - \frac{\rho_1}{1-\rho_1}, \tag{1}$$

et pour les itérations suivantes on a la relation de recurrence

$$\rho_{k+1} = 1 - \frac{\rho_k}{1-\rho_k}, \quad \text{pour } k \geq 1. \tag{2}$$

Cette relation permet de calculer tous les termes de la suite $(\rho_k)_{k\geq 1}$ à partir du premier terme ρ_1. Si on veut que tous ces facteurs soit égaux, il est nécessaire que ρ_1 vérifie l'équation

$$\rho = 1 - \frac{\rho}{1-\rho}, \tag{3}$$

dont la seule solution comprise entre 0 et 1/2 est

$$\rho = \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 2 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

On reconnait l'apparition du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Cette méthode est dite *méthode de la section d'or*. Puisque au bout de N itérations, l'intervalle d'incertitude $[a_N, b_N]$ contenant $t^\star$ est de taille $(1-\rho)^N$, la méthode de la section d'or converge quand f est unimodale.

Une autre façon de choisir les coefficients consiste à minimiser la taille de l'intervalle d'incertitude obtenu au bout de N itérations; il s'agit alors de minimiser le produit $(1-\rho_1)...(1-\rho_N)$ sous les contraintes de recurrence (2) et les contraintes $0 \leq \rho_k \leq \frac{1}{2}$ pour tout $k \leq N$. En introduisant la suite de Fibonnacci $(F_k)_{k\geq -1}$ définie par

$$F_{-1} = 0,\ F_0 = 1,\ F_{k+1} = F_k + F_{k-1},$$

on peut montrer que la solution est donnée par

$$\rho_k = 1 - \frac{F_{N-k+1}}{F_{N-k+2}} \text{ pour } 1 \leq k \leq N. \tag{4}$$

Dans ce cas, on a

$$(1-\rho_1)...(1-\rho_N) = \frac{1}{F_{N+1}}. \tag{5}$$

Afin d'obtenir la solution avec une erreur inférieur à $e > 0$, il suffit de choisir au départ N tel que

$$\frac{b_0 - a_0}{F_{N+1}} < e. \tag{6}$$

Notons que $\rho_N = \frac{1}{2}$; on ne peut donc réduire l'intervalle à la dernière étape; c'est pour cela qu'en pratique, on choisit $\rho_N = \frac{1}{2} - \epsilon$, où $\epsilon < 0$ est suffisament petit.

2. **Méthode de dichotomie avec dérivée**

Supposons ici que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a_0, b_0]$ et que $f'(a_0) < 0$ et $f'(b_0) > 0$. Il existe alors un point $t^\star \in [a_0, b_0]$ tel que $f'(t^\star) = 0$. Si de plus f est unimodale, alors $t^\star$ réalise le minimum de f. On cherche la racine de l'équation $f'(x) = 0$ de la façon suivante: on évalue $f'(c)$ où c est le milieu de $[a, b]$. Si $f'(c) > 0$, alors $t^\star \in [a, c]$, sinon $t^\star \in [c, b]$. On recommence ensuite la recherche avec l'intervalle $[a, c]$ ou l'intervalle $[c, b]$. Pour obtenir la solution avec un précision inférieur à e ($e > 0$), il faudrait en général N itérations, avec

$$\frac{b_0 - a_0}{2^N} < e.$$

3. Méthode de Newton-Raphson

On suppose ici que f est de classe $\mathscr{C}^2$. On démarre la recherche à partir d'un point $x = x^{(0)}$. Ensuite, à chacune des itérations, on minimise la fonction

$$q(x) = f(x^{(k)}) + f'(x^{(k)})(x - x^{(k)}) + \frac{1}{2} f''(x^{(k)})(x - x^{(k)})^2 \approx f(x). \qquad (7)$$

Le minimum est atteint alors au point $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \dfrac{f'(x^{(k)})}{f''(x^{(k)})}$. La méthode de Newton marche bien si $f''(x) > 0$ dans $[a_0, b_0]$. Sinon, si f'' change de signe, la méthode de Newton peut échouer ou converger vers un minimum local.

Question: Écrire sous SCILAB (et visualiser les résultats) des fonctions qui calculant le minimum d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$ avec une précision e, et cela, avec chacune des quatres méthodes précédentes. Comparer les résultats pour les fonctions suivantes:

$$\begin{array}{rcl} f_1(x) &=& x^2 - 2\sin x, \quad [a,b] \;=\; [0,2], x^{(0)} = 1, \\ f(x) &=& x^2 + 2e^{-x}, \quad [a,b] \;=\; [0,1],\ x^{(0)} = 0.5, \\ f(x) &=& -\frac{1}{x} + \cos x, \quad [a,b] \;=\; [2,4],\ x^{(0)} = 2.1. \end{array}$$