Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2018-2019

TP 2 : Algorithmes de gradient et de Newton pour la minimisation d'une fonctionnelle quelconque

Dans cette deuxième séance, on cherche tout d'abord à appliquer l'algorithme de gradient construit au TP1 à une fonctionnelle plus générale qu'une fonction quadratique puis à améliorer cet algorithme.

Dans toute la séance, J désigne une fonction C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ possédant au moins un minimum sur $\mathbb{R}^n$. Dans les exemples informatiques, on s'intéressera en particulier à la fonction suivante sur $\mathbb{R}^2$, dite de Rosenbrock:

$$R(x, y) = 10(y - x^2)^2 + (x - 1)^2$$

1. Montrer que R possède un unique minimum qu'on déterminera.
2. Représenter avec Scilab les lignes de niveau de R sur $[-1, 2] \times [-1, 2]$.
3. On appelle algorithme du gradient à pas fixe appliqué à la fonction J la suite de points $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée d'un point initial quelconque $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et telle que

   $$u_{k+1} = u_k - \rho d_k$$

   avec $\rho > 0$ le pas choisi et $d_k = \nabla J(u_k)$ le gradient de J au point u_k.

   On peut montrer que pour un pas bien choisi, et sous certaines conditions sur J, alors u_k converge vers un minimum de J.
4. Adapter l'algorithme de gradient à pas fixe `GPF` écrit lors de la première séance pour construire une nouvelle fonction `GPF2` ayant pour arguments d'entrée `J,nablaJ,u0,epsilon,max_iter,rho` et les mêmes arguments de sortie, réalisant la recherche d'un minimum d'une fonction $J \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

5. Appliquer l'algorithme précédent au cas de la fonction de Rosenbrock. Que trouve t-on pour `u_0=[1;0]`, `epsilon=1E-4` et `rho` égal respectivement à 0.01, 0.02 et 0.03?

6. On appelle algorithme de Newton appliqué à la fonction J la suite de points $(v_k)_{k\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée d'un point initial quelconque $v_0 \in \mathbb{R}^n$ et telle que
$$v_{k+1} = v_k - p_k$$
avec
$$p_k = HJ(v_k)^{-1}.\nabla J(v_k)$$
où $HJ(v_k)$ représente la matrice Hessienne de J au point v_k.

7. Ecrire avec Scilab un algorithme de Newton pour rechercher un minimum d'une fonction $J \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

8. Appliquer l'algorithme précédent au cas de la fonction de Rosenbrock et comparer les résultats obtenus avec ceux de la méthode du gradient.