Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2019-2020

TP 1 : algorithmes de gradient pour la minimisation d'une fonctionnelle quadratique

Soit A la matrice symétrique de taille 5 définie par

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 12 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 24 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 48 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 96 \end{pmatrix}.$$

Soit b le vecteur défini par

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

On considère la fonctionnelle J définie sur $\mathbb{R}^5$ par

$$J(v) = \frac{1}{2}(Av, v) - (b, v).$$

1) Vérifier à l'aide du logiciel Scilab que la matrice A est symétrique définie positive. En déduire l'existence et l'unicité d'un point de minimum u de J sur $\mathbb{R}^5$.
2) Donner une caractérisation de ce point de minimum (condition d'optimalité du premier ordre).
3) Calculer à l'aide du logiciel Scilab λ_1 et λ_5 les plus petite et plus grande valeurs propres de A.
4) On rappelle que l'algorithme du gradient à pas fixe défini par

$$u_{k+1} = u_k - \rho d_k, \quad d_k = Au_k - b,$$

converge vers u pour toute initialisation u_0 si ρ est choisi tel que

$$0 < \rho < \frac{2}{\lambda_5}$$

et que la vitesse maximale de convergence est obtenue pour le choix

$$\rho = \frac{2}{\lambda_1 + \lambda_5}.$$

5) Proposer une fonction Scilab utilisant la méthode du gradient à pas fixe pour rechercher le minimum de J du type

```
function [u, nb_iter, residu] = GPF (A,b,u0,epsilon,max_iter,rho)
```

où `epsilon, max_iter, nb_iter, residu` représentent respectivement la précision souhaitée de la solution numérique, le nombre maximal d'itérations à ne pas dépasser, le nombre d'itérations effectuées et la norme du gradient $d_k = Au_k - b_k$.

6) Tester votre algorithme en choisissant `u_0=[0;0;0;0;0]`, `max_iter=20000`, `epsilon=10^{-5}`, et par exemple les valeurs $\frac{2}{\lambda_1+\lambda_5}$ et $\frac{1}{\lambda_1+\lambda_5}$ pour `rho`. Commenter.
7) On rappelle que l'algorithme du gradient à pas optimal est défini par

$$u_{k+1} = u_k - \rho_k d_k, \quad d_k = Au_k - b, \quad \rho_k = \frac{(d_k, d_k)}{(Ad_k, d_k)}.$$

Proposer une nouvelle fonction Scilab utilisant la méthode du gradient à pas optimal pour rechercher le minimum de J.
8) Tester votre algorithme en choisissant `u_0=[0;0;0;0;0]`, `max_iter=20000`, `epsilon=10^{-5}`, et comparer avec la méthode du gradient à pas fixe.