

**TP 2 : Algorithmes de gradient et de Newton
pour la minimisation d'une fonctionnelle quelconque**

Dans cette deuxième séance, on cherche tout d'abord à appliquer l'algorithme de gradient construit au TP1 à une fonctionnelle plus générale qu'une fonction quadratique puis à améliorer cet algorithme.

Dans toute la séance, J désigne une fonction C^2 de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} possédant au moins un minimum sur \mathbb{R}^n . Dans les exemples informatiques, on s'intéressera en particulier à la fonction suivante sur \mathbb{R}^2 , dite de Rosenbrock:

$$R(x, y) = 10(y - x^2)^2 + (x - 1)^2$$

1. Montrer que R possède un unique minimum qu'on déterminera.
2. Représenter avec Scilab les lignes de niveau de R sur $[-1, 2] \times [-1, 2]$.
3. On appelle algorithme du gradient à pas fixe appliqué à la fonction J la suite de points $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée d'un point initial quelconque $u_0 \in \mathbb{R}^n$ et telle que

$$u_{k+1} = u_k - \rho d_k$$

avec $\rho > 0$ le pas choisi et $d_k = \nabla J(u_k)$ le gradient de J au point u_k .

On peut montrer que pour un pas bien choisi, et sous certaines conditions sur J , alors u_k converge vers un minimum de J .

4. Adapter l'algorithme de gradient à pas fixe GPF écrit lors de la première séance pour construire une nouvelle fonction GPF2 ayant pour arguments d'entrée `J`, `nablaJ`, `u0`, `epsilon`, `max_iter`, `rho` et les mêmes arguments de sortie, réalisant la recherche d'un minimum d'une fonction $J \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.

5. Appliquer l'algorithme précédent au cas de la fonction de Rosenbrock.
Que trouve t-on pour $u_0=[1;0]$, $\epsilon=1E-4$ et ρ égal respectivement à 0.01, 0.02 et 0.03?
6. On appelle algorithme de Newton appliqué à la fonction J la suite de points $(v_k)_{k \in \mathbb{N}}$ définie par la donnée d'un point initial quelconque $v_0 \in \mathbb{R}^n$ et telle que

$$v_{k+1} = v_k - p_k$$

avec

$$p_k = HJ(v_k)^{-1} \cdot \nabla J(v_k)$$

où $HJ(v_k)$ représente la matrice Hessienne de J au point v_k .

7. Ecrire avec Scilab un algorithme de Newton pour rechercher un minimum d'une fonction $J \in C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.
8. Appliquer l'algorithme précédent au cas de la fonction de Rosenbrock et comparer les résultats obtenus avec ceux de la méthode du gradient.