Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
L3, Optimisation et Applications (LSMA651)
Année 2019-2020

TP 3 : algorithme du simplexe

Dans cette troisième séance, on s'intéresse à la maximisation d'une fonctionnelle linéaire sous contrainte linéaire par l'algorithme du simplexe.

Pour illustrer la méthode, on s'intéresse au problème suivant:

$$\begin{array}{l} \max x_1 + 2x_2 + x_3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 10, \\ x_1 + x_3 \leq 2. \end{array} \tag{1}$$

De manière générale, on va résoudre le problème:

$$\begin{array}{l} \max C_1^T X, \quad X \in \mathbb{R}^p\ X \geq 0 \\ GX \leq D \end{array} \tag{2}$$

où $C_1 \in \mathbb{R}^p$, $G \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{R})$ et $D \in \mathbb{R}^m$ tel que $D \geq 0$ qu'on mettra tout d'abord sous forme canonique

$$\begin{array}{l} \max C^T X, \quad X \in \mathbb{R}^n \\ X \geq 0 \\ AX = B \end{array} \tag{3}$$

où $C \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^m$ tel que $B \geq 0$.

On supposera que A est de rang $m < n$.

1. Récrire le problème (2) sous forme canonique et indiquer un lien entre m, n et p.

2. Avec les notations usuelles relatives à l'extraction d'une sous matrice, on rappelle le résultat suivant: un vecteur X^0 de l'ensemble S des points admissibles de (3) est un sommet s'il existe une sous matrice carrée de A, inversible et de taille m notée $A_{L,J}$ (avec $L = \{1, ..., m\}$ et

J une sous famille d'indices de $N = \{1, ..., n\}$ de cardinal m) telle que $X_J^0 = A_{L,J}^{-1} B \geq 0$ et $X_{N \setminus J} = 0$. Déterminer un sommet simple pour le problème (2) en remarquant qu'il existe une sous matrice identité de A de taille m.

3. Une fois le premier sommet trouvé, on récrit le critère uniquement à l'aide des variables hors sommet à partir de l'expression des contraintes:

$$A_{L,J} X_J + A_{L,N \setminus J} X_{N \setminus J} = B$$

soit

$$X_J + H X_{N \setminus J} = B' \tag{4}$$

avec $H = A_{L,J}^{-1} A_{L,N \setminus J}$ et $B' = A_{L,J}^{-1} B \geq 0$. On se retrouve donc avec une expression du critère sous la forme:

$$J(X) = C'^T X_{N \setminus J} + cste$$

Déterminer l'expression de C' en fonction de C, A et de la famille d'indices J.

4. Le sommet suivant dans l'algorithme du simplexe consiste à rentrer dans la base l'indice $i_{in} \in N \setminus J$ tel que $C'_{i_{in}}$ soit maximal (tout en étant strictement positif) et à faire sortir de la base l'indice i_{out} pour lequel la coordonnée du vecteur $B'./H(:, i_{in})$ est minimale parmi toutes ses coordonnées positives.

   On peut alors réactualiser avec la nouvelle famille d'indice J_{new} les vecteurs X_J avec la relation (4) et C' (on admet qu'on obtient bien ainsi un nouveau sommet de l'ensemble admissible qui a une valeur de fonction coût supérieure).

   L'algorithme du simplexe s'arrête quand toutes les coordonnées de C' sont négatives et dans ce cas X_J est une solution au problème (on admet que cela se produit en temps fini).

   Ecrire un script Scilab donnant la suite des bases J et des sommets X_J pour un problème de type (2).

5. Que donne l'algorithme précédent pour l'exemple (1)?