Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
Master 1 MINT & Master MMM
Cours : Optimisation
Année : 2015-2016
Enseignant : T. Z. Boulmezaoud

Contrôle 5 novembre 2015

Exercice 1. Résoudre graphiquement le problème

$$\min f(x,y) = x^2 + y^2, \ (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} 5 - 2x - y &\leq 0, \\ 3 - y &\leq 0. \end{aligned}$$

Exercice 2.

1. Soient $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction affine et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Montrer que $g \circ f$ est convexe.
2. En déduire que la fonction $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |x-y|$ est convexe.
3. Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x,y) = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{2}(y-1)^2$. Est-elle convexe ?
4. On considère la fonction $J : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

   $$J(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}(y-1)^2 + |x-y|.$$

   et on s'intéresse au problème de minimisation

   $$\min_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} J(x,y). \tag{1}$$

   (a) Montrer que J est strictement convexe.

   (b) Montrer que J est différentiable en tout point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $x \neq y$ et calculer $\nabla J(x,y)$.
   Indication : on peut distinguer les deux cas $x > y$ et $x < y$.

(c) Montrer que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ J(x,y) \geq \frac{1}{4}(x^2+y^2) - \frac{1}{2}.$$

(d) Montrer que le problème de minimisation (1) admet une et une seule solution $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

(e) Montrer que nécessairement $x_0 = y_0$.
Indication : on peut raisonner par l'absurde et supposer que $x_0 \neq y_0$ et utiliser la condition d'optimalité en (x_0, y_0).

(f) En minimisant la fonction $t \in \mathbb{R} \mapsto J(t,t)$ trouver (x_0, y_0).

Exercice 3. On considère la fonction

$$G(x,y) = \frac{1}{2}(x+y)^2 + (x-y)^2 - 4,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

1. Est-elle convexe ? Est-elle strictement convexe ?
2. On considère le problème d'optimisation

$$(\mathscr{P}) \quad \begin{cases} \min F(x,y),\ (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \text{avec} \\ G(x,y) \geq 0, \\ y \geq 0. \end{cases}$$

où

$$F(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$

On admet dans la suite que ce problème admet au moins une solution globale.

(a) Est-il un problème convexe ?

(b) Justifier pourquoi toute solution de ce problème doit réaliser les conditions KKT.

(c) Ecrire les conditions KKT.

(d) Trouver toutes les solutions globales du problème.

Corrigé de l'exercice 1: *Il s'agit de trouver le point le plus proche de l'origine dans le polyèdre défini par les contrainte. On trouve le point ....*

Corrigé de l'exercice 2:

1. *Pour tous* $\lambda \in [0,1]$ *et* $x, y \in \mathbb{R}^2$*, on a*

$$g(f(\lambda x+(1-\lambda)y) = g(\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)) \leq \lambda g(f(x))+(1-\lambda)g(f(y)).$$

2. *Il suffit d'appliquer le résultat précédent quand* $f(x,y) = x - y$ *(*f *est affine) et* $g(t) = |t|$ *(*g *est convexe).*
3. *La matrice hessienne de* h *est l'identité. Elle est donc définie positive en tout point.* h *est strictement convexe.*
4. (a) J *est la somme d'une fonction strictement convexe et d'une fonction convexe.* J *est donc strictement convexe.*

   (b) *On a* $J(x,y) = h(x,y) + g(f(x,y))$ *avec* $g(t) = |t|$ *et* $f(x,y) = x - y$*.* h *et* f *sont polynomiales donc différentiables en tout point de* $\mathbb{R}^2$*. La fonction* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}^*$*. Par composition,* h *est différentiable en tout point* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *tel que* $f(x,y) \neq 0$*. De plus,*

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)g'(f(x,y)),$$
$$\frac{\partial J}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial h}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)g'(f(x,y)).$$

   Puisque $g'(t) = \mathrm{signe}(t)$*, on a*

$$\frac{\partial J}{\partial x}(x,y) = x + \mathrm{signe}(x-y), \ \frac{\partial J}{\partial y}(x,y) = y - 1 - \mathrm{signe}(x-y).$$

   (c) *On a* $J(x,y) - [\frac{1}{4}(x^2+y^2) - \frac{1}{2}] = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}(y-2)^2 \geq 0.$

   (d) J *est continue sur* $\mathbb{R}^2$*. D'après l'inégalité précédente* $\lim_{\|(x,y)\| \longrightarrow +\infty} J(x,y) = +\infty$*. Donc* J *admet un minumum sur* $\mathbb{R}^2$*. Ce minimum est unique car* J *est strictement convexe.*

   (e) *Si* $x_0 \neq y_0$*,* J *est différentiable en* (x_0, y_0) *et forcément* $\nabla J(x_0, y_0) = 0$*, c'est-à-dire* $x_0 + \mathrm{signe}(x_0 - y_0) = 0$ *et* $y_0 - 1 - \mathrm{signe}(x_0 - y_0) = 0$*. Si* $x_0 < y_0$ *alors* $x_0 = 1$ *et* $y_0 = 0$ *ce qui est absurde car* $x_0 > y_0$*. Si* $x_0 > y_0$*,* $x_0 = -1$ *et* $y_0 = 2 > x_0$*, ce qui est aussi absurde.*

   (f) *Puisque nécessairement* $y_0 = x_0$*, on a forcément* $\min_{(x,y)\in R^2} J(x,y) = J(x_0, y_0) = J(x_0, x_0)$*. Forcément* x_0 *réalise aussi le minimum de* $t \mapsto J(t,t) = \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}(t-1)^2$ *dont le minimum est atteint en* $t = 1/2$*.*

Corrigé de l'exercice 3:

1. *On a* $D^2G(x,y) = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. *Les valeurs propres de cette matrices sont strictement positives car* $\lambda_1 + \lambda_2 = 6 > 0,\ \lambda_1\lambda_2 = 8 > 0$. D^2G *est donc DP en tout point et* G *est strictement convexe.*

2. (a) *Bien que* F *est convexe le programme n'est pas convexe car la contrainte s'écrit* $-G(x) \leq 0$ *et* $-G$ *est concave mais pas convexe (car non affine) (le domaine admissible n'est pas convexe).*

   (b) *Soit* (x_0, y_0) *un point solution. Si* $y_0 > 0$ *et* $G(x_0, y_0) > 0$*, le point est à l'intérieur du domaine admissibilité. La condition d'optimalité s'écrit* $\nabla F(x_0, y_0) = 0$ *et les conditions KKT aussi. Si par contre* $y_0 = 0$ *ou* $G(x_0, y_0) = 0$ *on montre facilement que le point est qualifié.*

   (c) *Les conditions KKT s'écrivent :*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \lambda_1 \begin{pmatrix} 3x - y \\ 3y - x \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

   avec $\lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ (x,y) \in C$ *et* $\lambda_1 G(x,y) = 0,\ \lambda_2 y = 0$. *On distingue trois cas*

   — *Si* $G(x,y) > 0$*, alors* $\lambda_1 = 0$. *D'où* $x = 0$ *et* $y = \lambda_2$. *Puisque* $\lambda_2 y = 0$*, on a* $y = 0$. *D'où* $(x,y) = (0,0)$. *Ce n'est pas un point admissible.*

   — *Si* $y = 0$ *et* $G(x,y) = 0$*, alors* $x^2 = \frac{8}{3}$, $(1 - 3\lambda_1)x = 0$ *et* $x\lambda_1 - \lambda_2 = 0$. *D'où,* $\lambda_1 = 1/3$, $x = 3\lambda_2 \leq 0$. *Soit* $x = 2\sqrt{2/3}$, $y = 0$, $\lambda_1 = 1/3$, $\lambda_2 = 2\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}$.

   — *Si* $y > 0$ *et* $G(x,y) = 0$*, alors nécessairement* $\lambda_2 = 0$ *et*

$$(1 - 3\lambda_1)x + \lambda_1 y = 0,\ \lambda_1 x + (1 - 3\lambda_1)y = 0.$$

   Puisque $(x,y) \neq (0,0)$*, le déterminant de ce système s'annule :*

$$(3\lambda_1 - 1)^2 - \lambda_1^2 = (2\lambda_1 - 1)(4\lambda_1 - 1) = 0,$$

   D'où $\lambda_1 = 1/2$ *ou* $\lambda_1 = 1/4$.

   — *Si* $\lambda_1 = 1/2$, $x = y$ *et* $G(x,y) = 2x^2 - 4 = 0$. *D'où* $x = y = \sqrt{2}$.

   — *Si* $\lambda_1 = 1/4$, $x = -y$ *et* $G(x,y) = 4x^2 - 4 = 0$. *D'où* $x = -1$ *et* $y = 1$.

   On compare donc les valeurs aux trois points réalisant les conditions KKT : $f(2\sqrt{2/3}, 0) = \frac{4}{3}$, $f(\sqrt{2}, \sqrt{2}) = 2$, $f(-1,1) = 1$. *Le minimum global est atteint en* $(-1,1)$.