M1 MINT et M1 MMM
Semestre 7, Année 2015
Mr DUMAS

CC2 OPTIMISATION, correction

Exercice 1 –

1. Au vu des hypothèses, il a été démontré en cours que le fonction f est minorée (et possède un minimum global) sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi la fonction $t \mapsto h_k(t)$ est également minorée. Comme $h_k'(0) < 0$ par construction (d_k direction de descente), on en déduit qu'il existe un minimum (local ou global) pour $t_0 > 0$ tel que $h_k'(t_0) = 0$ L'ensemble considéré est donc non vide. Comme il est minoré, il possède un infimum $t_k > 0$. Graphiquement, t_k est le premier point critique de h_k pour $t > 0$.

2 a) Pour l'inégalité de droite, il s'agit d'une application directe de la formule de Taylor de la forme

$$|h_k(t) - h_k(0)| \leq \int_0^t h_k'(s)ds$$

avec

$$|h_k'(t) - h_k'(0)| = | < d_k, g(x_k + td_k) > - < d_k, g(x_k) > | \leq Lt||d_k||^2$$

Pour l'inégalité de gauche, on constate que h_k est décroissante sur $[0, t_k]$ car sinon, il existerait un autre point critique pour h_k avant t_k, ce qui contredirait la définition de t_k (infimum).

2b) Un calcul simple donne

$$t_{min} = -\frac{< d_k, g(x_k) >}{L||d_k||^2}$$

.

2c) La condition de Lipschitz pour g entre 0 et t_k donne

$$0 = |h_k'(t_k)| \leq h_k'(0) + Lt_k||d_k||^2$$

étant donné que

$$h_k'(t) =< d_k, g(x_k + td_k) >$$

soit

$$0 \leq < d_k, g(x_k) > +Lt_k||d_k||^2$$

.

On en déduit que

$$f(x_{k+1}) \leq f(x_k) - \frac{(d_k, g(x_k))^2}{2L||d_k||^2}$$

en évaluant le terme de droite de l'inégalité (1) en t_{min} sachant que $t_{min} \in [0, t_k]$ grâce au résultat précédent.

2d) la condition Z est donc bien vérifiée pour le pas choisi ici en prenant $C = \frac{1}{2L}$.

3. En sommant les inégalités obtenues entre 1 et N, on trouve

$$\sum_{k=1}^{N} ||g(x_k)||^2 \cos^2(\theta_k) \leq \frac{1}{C}(f(x_0) - f(x_N))$$

Comme f est minorée, on en déduit que les sommes partielles de la série précédente (à termes positifs) sont majorées et la série est donc convergente.

4. Lorsque $d_k = -g(x_k)$, on a $\cos(\theta_k)^2 = 1$. La série de terme général $||g(x_k)||^2$ est donc convergente. On a donc

$$\lim_{k \to \infty} g(x_k) = 0$$

Exercice 2 –

1. Points communs: méthode basée sur l'évolution d'une population, méthode stochastique, existence d'un opérateur de mutation.

   Différences: pas d'opérateur de croisement, sélection déterministe.

2. $CR \in [0, 1]$ représente une probabilité de mutation pour les indices $i \neq i_0$. F représente un pas de mutation dans la direction $b_j - c_j$ à partir de a_j

3. Voir fichier Scilab joint pour un programme complet.