Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
Master 1 MINT & Master MMM
Cours: Optimisation
Année: 2015-2016
Enseignant: T. Z. Boulmezaoud

TD1 : révisions (convexité)

Exercice 1 – On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivants

1. $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq 1\}$,
2. $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \geq 0\}$,
3. $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0 \text{ ou } y \geq 0\}$,
4. $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 0,\ y \geq x^3\}$,
5. $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \leq 4,\ 3x + 3y + 1 \geq 0\}$,
6. $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 4y^2 \geq 4,\ 3x + 3y + 1 \geq 0\}$.

Représenter graphiquement chacun de ces ensembles et dire s'il est convexe ou pas.

Exercice 2 – Etudier la convexité ou la concavité de chacune des fonctions

- $f_1(x, y) = x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz$.
- $f_2(x, y, z) = x \log x + y \log y + z \log z$.
- $f_3(x, y) = x(x + y^2)$.
- $f_4(x, y) = \log(xy)$.

Exercice 3 – En microéconomie, une *fonction de production* exprime la relation entre les volumes des entrants (inputs) d'une entreprise et le volume de sa production (output). Elle s'écrit sous la forme $Q = f(x_1, ..., x_n)$ où Q est la quantité produite et $x_1, ...x_n$ les facteurs de production (travail, capital,...). Elle peut par exemple être de la forme $Q = a_1x_1 + ... + a_nx_n + c$

ou de la forme $Q = cx_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ (fonction de Cobb-Douglas) ou de la forme $Q = \min(a_1x_1, ..., a_nx_n)$ (fonction de Leontieff).

On se place ici dans le cas d'une fonction de production de la forme $f(x_1, ...x_n) = cx_1^{a_1}...x_n^{a_n}$ avec $c > 0$, $a_1 > 0, ..., a_n > 0$.

Étudier la concavité de f sur $(\mathbb{R}_+^*)^n$.

Exercice 5 – Soit A une matrice carrée et symétrique de taille $n \times n$. On considère la fonction quadratique sur $\mathbb{R}^n$

$$f(X) = \frac{1}{2}X^TAX + B^TX + c,$$

pour tout $X = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Ici $B = (b_1, ..., b_n)^T \in \mathbb{R}^n$ et $c \in \mathbb{R}$ (on convient de représenter les vecteurs de $\mathbb{R}^n$, qui sont à priori des n-uplets, par leur vecteurs coordonnées qui sont des matrices $n \times 1$).

1. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit convexe.

2. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit strictement convexe.

Exercice 6 –

1. Trouver une fonction strictement convexe de $]-1, 1[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f''(0) = 0$.

2. Montrer l'inégalité suivante

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \geq \Pi_{i=1}^{n} x_i^{\lambda_i},$$

pour tous $x_1 > 0, ..., x_n > 0$ et $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_n \geq 0$ tels que $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

Exercice 7 – On considère la fonction f de $\mathbb{R}^n$ dans $\bar{\mathbb{R}}$ définie par

$$f(x_1, ..., x_n) = \begin{cases} -(x_1...x_n)^{1/n} & \text{si } x_1 > 0....x_n > 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Étudier la convexité de f.

Exercice 8 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie doté d'une norme $\|.\|$. Soit $\boldsymbol{x}_0 \in E$ et $r > 0$ un réel. Montrer que la boule $B_r(\boldsymbol{x}_0)$ est convexe. Dessiner cette boule dans le cas $E = \mathbb{R}^2$, $\boldsymbol{x}_0 = \mathbf{0}$, $r = 1$ et

$$\|\boldsymbol{x}\|^2 = x^2 + y^2,\ \|\boldsymbol{x}\|^2 = 9x^2 + 4y^2,\ \|\boldsymbol{x}\| = |x| + |y|,\ \|\boldsymbol{x}\| = \max(|x|, |y|).$$

Exercice 9. – Dans tout l'exercice, C désigne un convexe fermé non vide de $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire euclidien et la norme associée sont notés $\langle ., . \rangle$ et $\|.\|$ respectivement.

1. Soit f une fonction de C dans $\mathbb{R}$ *strictement convexe*. Montrer que si f admet un minimum sur C alors il est unique.

2. Soit $\boldsymbol{z}$ un point fixé de $\mathbb{R}^n$. On considère la fonction

$$g\ :\ \boldsymbol{x} \in C \mapsto \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\|^2 \in \mathbb{R}.$$

   (a) Montrer que g est strictement convexe.

   (b) Montrer qu'il existe un et un seul élément $\boldsymbol{z}_*$ dans C tel que

$$g(\boldsymbol{z}_*) = \inf_{\boldsymbol{x} \in C} g(\boldsymbol{x}).$$

   Indication: on peut considérer une suite $(\boldsymbol{x}_k)_{k \geq 1}$ tel que

$$g(\boldsymbol{x}_k) \longrightarrow \inf_{\boldsymbol{x} \in C} g(\boldsymbol{x}) \text{ quand } k \longrightarrow +\infty,$$

   puis utiliser un argument de compacité.

   (c) Montrer que $\boldsymbol{z}_*$ est l'unique point de C vérifiant la propriété

$$\forall \boldsymbol{x} \in C,\ \langle \boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_*, \boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}_* \rangle \leq 0. \tag{1}$$

   Dans la suite, on note $P_C(.)$ l'application $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n \mapsto \boldsymbol{z}_* \in C$. Ainsi, pour tout $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$, $P_C(\boldsymbol{z})$ et la projection de $\boldsymbol{z}$ sur C et on a

$$\|\boldsymbol{z} - P_C(\boldsymbol{z})\| = \inf_{\boldsymbol{x} \in C} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}\| = d_C(\boldsymbol{z}),$$

   où $d_C(.)$ désigne la distance par rapport à C.

3. Montrer que

$$\forall \boldsymbol{z}_1 \in \mathbb{R}^n,\ \boldsymbol{z}_2 \in \mathbb{R}^n,\ \|P_C(\boldsymbol{z}_1) - P_C(\boldsymbol{z}_2)\| \leq \|\boldsymbol{z}_1 - \boldsymbol{z}_2\|.$$

Exercice 10 – Soit E un espace vectoriel de dimension finie doté d'une norme $\|.\|$. Soit A un sous-ensemble fermé non vide de E. Montrer que A est convexe si et seulement si la fonction distance par rapport à A est convexe. On rappelle que cette dernière est définie par

$$\forall \boldsymbol{x} \in E,\ d_A(\boldsymbol{x}) = \inf_{\boldsymbol{y} \in A} \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}\|.$$