Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
Master 1 MINT & Master MMM
Cours : Optimisation
Année : 2015-2016
Enseignant : T. Z. Boulmezaoud

TD 2 : Optimisation sans et avec constraintes

Exercice 1 – Rechercher les extréma des fonctions suivantes

(a) $f(x,y) = \dfrac{x}{1+x^2+y^2}$,

(b) $g(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$,

(c) $h(x,y) = x((\ln x)^2 + y^2)$,

(d) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4ax - 4bx,\ a,\ b$ fixés.

Exercice 2 – Trouver la plus petite distance entre $(0,1)$ et les points de la parabole $x^2 = 2y$.

Exercice 3 – Rechercher les extréma de la fonction

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 12xy,$$

sur $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0,\ y > 0,\ xy > 1\}$.

Exercice 4 – On note $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées de taille n. Soit S une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{R})$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $S(\theta)$ est symétrique définie positive. On pose

$$f(\theta) = -\log(\det(S(\theta))) - U^T S(\theta)^{-1} U.$$

Ici U est un vecteur constant de $\mathbb{R}^n$.
Caractériser les éventuels points critiques de f.

Exercice 5 – Calculer le cône tangent et le cône normal au(x) point(s) indiqué(s) des ensembles suivants

— $X_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 4,\ -x + y \leq 2,\ x \geq 0,\ y \geq 0\}$, $(x,y) \in X_1$.
— $X_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$, $(x,y) = (\cos\theta, \sin\theta)$ avec θ fixé.
— $X_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$, même point.
— $X_4 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 1,\ y \leq 1\}$, $(x,y) = (0,1)$.
— $X_5 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^3,\ y \geq x^2\}$, $(x,y) = (0,0)$.

— $X_6 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq 0,\ y \leq (1-x)^3\}$, $(x,y) = (1,0)$.

Exercice 6 – Résoudre les problèmes

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\, x + 2xy + 2y - \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2},\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\
&x + y \leq 1, x \geq 0,\ y \geq 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\, x^2 + y^2 - xy - 3x,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\
&x \geq 0,\ y \geq 0,\\
&3x + 4y \leq 6,\\
&4y^2 \leq x + 2.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Min}\, y^3 - 3xy,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\
&x \geq 0,\ y \geq 0,\\
&2x + 5y \geq 20,\\
&x - 2y = 5.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Max}\, x + 2y,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\
&x \geq 0,\ y \geq 0,\\
&3x^2 + y^2 \leq 1,\\
&8y - x \geq 1.
\end{aligned}$$

Exercice 7 – Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + \alpha y^2 = 1\}$ où $\alpha > 0$ un réel fixé. On considère le problème

$$\mathrm{Min}_{(x,y)\in D} x + \alpha y \tag{1}$$

1. Est-ce que D est convexe ? est-t-il fermé ? est-t-il borné ?
2. En déduire que (1) admet au moins une solution.
3. Résoudre (1).

Exemple 8 – On considère le problème

$$\begin{aligned}
&\min f(x,y) = -x,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2,\\
&y \leq (1-x)^3\\
&x \geq 0,\ y \geq 0.
\end{aligned}$$

1. Montrer que ce problème admet une solution. Déterminer la graphiquement.
2. Vérifie-t-elle les conditions KKT ? Interpréter.