Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
Master 1 MINT & Master MMM
Cours : Optimisation
Année : 2015-2016
Enseignant : T. Z. Boulmezaoud

TD 3 : Programmation linéaire

Exercice 1. Résoudre par la méthode du simplexe

$$\begin{array}{l} \max 100x_1 + 200x_2 + 50x_3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ \begin{array}{rcl} 5x_1 + 5x_2 + 10x_3 & \leq & 1000, \\ 10x_1 + 8x_2 + 5x_3 & \leq & 2000, \\ 10x_1 + 5x_2 & \leq & 500. \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \max 4x_1 + 5x_2 \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \\ \begin{array}{rcl} 10x_1 + 10x_2 & \leq & 50, \\ 10x_1 + 20x_2 & \leq & 80, \\ 20x_1 + 10x_2 & \leq & 80. \end{array} \end{array}$$

Trouver graphiquement une solution au dernier problème.

Exercice 2. Résoudre par la méthode du simplexe

$$\begin{aligned} \max 2x + y&, \\ x \geq 0,\ y \geq 0&, \\ x + 2y \leq 6&, \\ x + y \leq 4&, \\ x \leq 3&. \end{aligned}$$

$$\begin{array}{l} \max 5x_1 - 2x_2 + x_3, \\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 \leq 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 10, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 \leq 12. \end{array}$$

Exercice 1 – On commence par transformer les contraintes d'inégalités en des contraintes d'égalités (avec seconds membres positifs) en introduisant trois variables d'écart positives t et u et v. Les contraintes s'écrivement alors

$$\begin{aligned} x + 2y + t &= 6, \\ x + y + u &= 4, \\ x + v &= 3. \end{aligned}$$

Il est clair maintenant que le point $(x, y, t, u, v) = (0, 0, 6, 4, 3)$ est un sommet. Les trois variables non nulles correspondantes t, u et v sont déjà éléminées dans le critère. On peut donc dresser le tableau

	x	y	t	u	v	b	θ
t	1	2	1	0	0	6	6
u	1	1	0	1	0	4	4
v	$\underline{1}$	0	0	0	1	3	3
J	2	1	0	0	0	0	
t	0	2	1	0	-1	3	$3/2$
u	0	$\underline{1}$	0	1	-1	1	1
x	1	0	0	0	1	3	
J	0	1	0	0	-2	-6	
t	0	0	1	-2	1	1	
y	0	1	0	1	-1	1	
x	1	0	0	0	1	3	
J	0	0	0	-1	-1	-7	

f atteint donc un maximum qui vaut 7. Il est atteint au point $(x, y) = (3, 1)$.

En introduisant les variables d'écart x_4, x_5, $x_6 \geq 0$, les contraintes s'écrivent

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_5 &= 10, \\ 4x_1 + x_2 + 5x_3 + x_6 &= 12. \end{aligned}$$

On reconnaît clairement le sommet $x_1 = x_2 = x_3 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 10$ et $x_6 = 12$.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	b	θ
x_4	$\boxed{1}$	-1	1	1	0	0	1	
x_5	2	2	1	0	1	0	10	5
x_6	4	1	5	0	0	1	12	3
c	5	-2	1	0	0	0	0	
x_1	1	-1	1	1	0	0	1	
x_5	0	4	-1	-2	1	0	8	2
x_6	0	$\boxed{5}$	1	-4	0	1	8	$8/5$
c	0	3	-4	-5	0	0	-5	
x_1	1	0	$6/5$	$1/5$	0	0	$13/5$	
x_5	0	0	$-9/5$	$6/5$	1	$-4/5$	$8/5$	
x_2	0	5	1	-4	0	1	8	
c	0	0	$-23/5$	$-13/5$	0	$-3/5$	$-49/5$	

Le maximum est donc atteint au sommet $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (13/5, 8/5, 0, 0, 8/5, 0)$.
The effective solution is $(x_1, x_2, x_3) = (13/5, 8/5, 0)$.