TD 4, Optimisation: Méthodes de descente

On considère f une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{||x|| \to +\infty} f(x) = +\infty$. On note g la fonction gradient de f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que g est Lipschitzienne sur tout ensemble $S_{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq f(x_0)\}$.

1. Montrer que f possède un minimum global x^* pour lequel $g(x^*) = 0$.

2. On cherche à construire une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un minimum (local ou global) de f. On suppose qu'il est possible de définir correctement celle-cià partir de la donnée de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et de la relation :

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k$$

où d_k désigne une direction de descente (c'està dire telle que $(d_k, g(x_k)) < 0$) et t_k le pas dans cette direction supposé satisfaire la conditions suivante :

$$q(t_k) \leq q(0) + m_1 t_k q'(0) \quad \text{et} \quad q'(t_k) \geq m_2 q'(0)$$

où on a noté $q(t) = f(x_k + t d_k)$ et où m_1 et m_2 sont deux réels tels que $0 < m_1 < m_2 < 1$.

Donner un exemple graphique des valeurs de t_k admissibles dans le cas d'une fonctionà une variable tracée 'à la main'.

3. On chercheà montrer que la méthode de descente ainsi construite est convergente vers un point critique de f lorsque $d_k = -g(x_k) = -g_k$ (direction du gradient).

3.1 Montrer que $q'(0) = -||g_k||^2$ dans ce cas.

3.2 Montrer que $m_1 ||g_k|| \cdot ||x_{k+1} - x_k|| \leq f(x_k) - f(x_{k+1})$.

3.3 Montrer que $(1 - m_2)||g_k|| \leq L||x_{k+1} - x_k||$ où L désigne la constante de Lipschitz de g dans S_{x_0}.

3.4 En déduire que $\lim_{k \to +\infty} g_k = 0$.

Question subsidiaire : proposer un algorithme permettant de construire la suite x_k, c'està dire en particulier de déterminer un réel t_k convenable.