Université de Versailles — Année 2015-2016
http://dumas.perso.math.cnrs.fr/MA751.html — M1, semestre 1

TP 5 Optimisation: algorithme d'Uzawa

PARTIE 1. Des disques immobiles.

On considère une configuation dans le plan de n disques repérés par leurs centres $(q_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}^2)^n$ et leurs rayons $(r_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}_+^*)^n$. On définit le domaine correspondant de non-intersection de ces disques:

$$Q = \{q = (q_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}^2)^n \quad / \quad \|q_i - q_j\| > r_i + r_j, \quad 1 \leq i < j \leq n\}$$

et on définit la fonction suivante sur $(\mathbb{R}^2)^n$:

$$D_{i,j}(q_1, ..., q_n) = \|q_i - q_j\| - (r_i + r_j)$$

1. Montrer que D est une fonction convexe sur $\mathbb{R}^{2n}$. Montrer que $D_{i,j}$ est C^1 et calculer son gradient, noté $G_{i,j}$.

2. L'ensemble Q est-il convexe?

PARTIE 2. Les disques en mouvement.

A présent, on souhaite que les disques se déplacent de la position $(q_i)_{1\leq i\leq n}$ à la position $(q_i + v_i)_{1\leq i\leq n}$ suivant une trajectoire rectiligne uniforme.

Cependant, en raison de possibles intersections à l'arrivée du déplacement, on cherche à trouver le déplacement admissible le plus proche du déplacement souhaité $v = (v_i)_{1\leq i\leq n} \in (\mathbb{R}^2)^n$.

On étudie donc le problème d'optimisation suivant:

$$\text{Trouver}\, u^* = argmin\,(J(u) = \|u - v\|^2) \qquad (Opt)$$

sur l'ensemble

$$C = \{u \in (\mathbb{R}^2)^n \quad / D_{i,j}(q) + < G_{i,j}(q), u > \geq 0, \quad 1 \leq i < j \leq n\}$$

1. Montrer que C est un ensemble fermé et convexe.

2. Montrer que si $q \in Q$ et $u \in C$, alors $q + u \in Q$.

3. Exprimer le problème (Opt) précédent en termes de projection et en déduire qu'il possède une unique solution.

4. Ecrire le Lagrangien du problème (Opt) puis exprimer sous forme pseudo-informatique l'algorithme d'Uzawa dans ce cas.

5. Déterminer une valeur $\rho_C > 0$ telle que pour tout $\rho \in]0, \rho_C[$, l'algorithme d'Uzawa converge vers la solution du problème (Opt).

6. *(Question subsidiaire)* Implémenter sous Scilab l'algorithme correspondant et le tester pour la configuration consistant en 3 disques de rayon identique égal à $\frac{1}{5}$ avec:

$$q = \{(0,0), (1,0), (\frac{1}{2}, 1)\}, \quad \text{et} \quad u = \{(1,0), (-\frac{1}{2}, 1), (-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4})\}$$