Université de Versailles Saint-Quentin-En-Yvelines
Master 1 MINT & Master MMM
Semestre 7
Année : 2015-2016
Enseignant : Mr. T. Z. Boulmezaoud & et Mr. L. Dumas

EXAMEN JANVIER 2016 : OPTIMISATION

Exercice 1.

1. Représenter graphiquement quelques lignes de niveau de la fonction
$$f(x, y) = 2(x-1)^2 + y^2 + 1,$$
puis représenter pour un point sur une des lignes de niveau, le gradient en ce point et un exemple de direction de descente.
2. Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $d \in \mathbb{R}^n$ est tel que
$$||\nabla f(x) + d|| \leq ||\nabla f(x)||$$
Montrer que d est une direction de descente de f en x.
3. Soit f une fonction différentiable et convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$ tels que $f(y) < f(x)$. Montrer que $y - x$ est une direction de descente de f en x.

Exercice 2. Le processus de sélection dans un algorithme génétique peut être de différents types. Dans tous les cas, pour la minimisation d'une fonction $x \mapsto J(x)$, il consiste à sélectionner de manière aléatoire en fonction de leur valeur suivant J une nouvelle population de `Npop` éléments.

1. Expliquer en détail le principe de sélection par le rang.
2. On souhaite utiliser un autre type de sélection, dite par tournoi. Cette méthode consiste à construire la nouvelle population de la manière suivante : on tire aléatoirement 2 éléments distincts parmi la population puis on garde le meilleur des deux éléments qu'on met dans la nouvelle population. On répète cette opération `Npop` fois.
Ecrire une fonction Scilab du type

`Anew=function(A)`
permettant d'obtenir la nouvelle population `Anew` après sélection par tournoi à partir de la population `A`. Ici `A` représente, comme dans l'algorithme initial, une matrice à `Npop` lignes et `n+1` colonnes où `A(k,n+1)` représente la valeur de la fonction associée à l'élément `A(k,1:n)`.

Exercice 3. Soit $n \geq 2$ un entier naturel et ω le domaine

$$\omega = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 > 0, \cdots, x_n > 0\}.$$

Soient $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ des réels fixés vérifiant $0 < \alpha_i < 1$ pour $i = 1, \cdots, n$ et

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1.$$

On définit sur ω la fonction

$$U(x_1, \cdots, x_n) = -x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n},$$

et on considère le problème d'optimisation

$$(\mathscr{P}) \qquad \min_{(x_1,\cdots,x_n)\in\omega} U(x_1, \cdots, x_n) \text{ sous la contrainte } \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq 1,$$

où $p_1 > 0, \cdots, p_n > 0$ sont aussi des réels fixés.

1. Calculer les dérivées partielles

   $$\frac{\partial U}{\partial x_i}(x_1, \cdots, x_n), \ \frac{\partial^2 U}{\partial x_i \partial x_j}(x_1, \cdots, x_n) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n \text{ et } (x_1, \cdots, x_n) \in \omega,$$

   et en déduire que la matrice hessienne de U en $(x_1, \cdots, x_n) \in \omega$ s'écrit

   $$H(x_1, \cdots, x_n) = U(x_1, \cdots, x_n) \left(\frac{\alpha_i \alpha_j}{x_i x_j} - \frac{\alpha_i}{x_i^2} \delta_{i,j} \right)_{1 \leq i,j \leq n},$$

   où $\delta_{i,j} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$.
2. Soit $(x_1, \cdots, x_n) \in \omega$ un point fixé. Soit $V = (v_1, \cdots, v_n)^t$ un vecteur colonne quelconque à n composantes réelles. Montrer que

   $$V^T H(x_1, \cdots, x_n) V = U(x_1, \cdots, x_n) \left(\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i v_i}{x_i} \right)^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i v_i^2}{x_i^2} \right).$$

3. En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que $H(x_1, \cdots, x_n)$ est semi-définie positive en tout point $(x_1, \cdots, x_n) \in \omega$.
4. En déduire que $(\mathscr{P})$ est un problème convexe. .
5. Justifier pourquoi toute solution de $(\mathscr{P})$ doit réaliser les conditions d'optimalité KKT. Ecrire ces conditions KKT pour le problème $(\mathscr{P})$.
6. Réciproquement, justifier pourquoi tout point réalisant ces conditions KKT est solution de $(\mathscr{P})$ (sans résoudre pour l'instant les équations résultant de ces conditions KKT).
7. Soit $(x_1, \cdots, x_n)$ un point réalisant ces conditions KKT. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n} p_i x_i = 1 \text{ et que } \frac{p_i x_i}{\alpha_i} = \frac{p_j x_j}{\alpha_j} \text{ pour tous } 1 \leq i, j \leq n.$$
8. En déduire qu'il existe un seul point réalisant les conditions KKT et donner l'expression des coordonnées de ce point en fonction des α_i, p_i, $1 \leq i \leq n$.
9. Montrer que pour tous réels $y_1 > 0, \ \cdots, y_n > 0$, on a
$$y_1^{\alpha_1} y_2^{\alpha_2} \cdots y_n^{\alpha_n} \leq (\frac{\alpha_1}{p_1})^{\alpha_1} (\frac{\alpha_2}{p_2})^{\alpha_2} \cdots (\frac{\alpha_n}{p_n})^{\alpha_n} (\sum_{i=1}^{n} p_i y_i).$$