

TD 1, Optimisation: Méthodes de gradient

Exercice 1 (examen 2015)

1. Représenter graphiquement quelques lignes de niveau de la fonction

$$f(x, y) = 2(x - 1)^2 + y^2 + 1$$

puis représenter pour un point sur une des lignes de niveau, le gradient en ce point et un exemple de direction de descente.

2. Soit f une fonction différentiable de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et $x \in \mathbb{R}^n$. On suppose que $d \in \mathbb{R}^n$ est tel que

$$\|\nabla f(x) + d\| \leq \|\nabla f(x)\|$$

Montrer que d est une direction de descente de f en x .

3. Soit f une fonction différentiable et convexe de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$. Soient x et y dans $\mathbb{R}^n$ tels que $f(y) < f(x)$. Montrer que $y - x$ est une direction de descente de f en x .

Exercice 2

On considère f une fonction C^1 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$, telle que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. On note g la fonction gradient de f définie de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose que g est Lipschitzienne sur tout ensemble $S_{x_0} = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) \leq f(x_0)\}$.

1. Montrer que f possède un minimum global x^* pour lequel $g(x^*) = 0$.
2. On cherche à construire une suite $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant vers un minimum (local ou global) de f . On suppose qu'il est possible de définir correctement celle-ci à partir de la donnée de $x_0 \in \mathbb{R}^n$ quelconque et de la relation :

$$x_{k+1} = x_k + t_k d_k$$

où d_k désigne une direction de descente (c'est-à-dire telle que $(d_k, g(x_k)) < 0$) et t_k le pas dans cette direction supposé satisfaire la conditions suivante :

$$q(t_k) \leq q(0) + m_1 t_k q'(0) \quad \text{et} \quad q'(t_k) \geq m_2 q'(0)$$

où on a noté $q(t) = f(x_k + t d_k)$ et où m_1 et m_2 sont deux réels tels que $0 < m_1 < m_2 < 1$.

Donner un exemple graphique des valeurs de t_k admissibles dans le cas d'une fonction à une variable tracée 'à la main'.

3. On peut montrer que la méthode de descente ainsi construite est convergente vers un point critique de f lorsque $d_k = -g(x_k) = -g_k$ (direction du gradient).

Proposer un algorithme permettant de construire la suite x_k , c'est-à-dire en particulier de déterminer un réel t_k convenable.